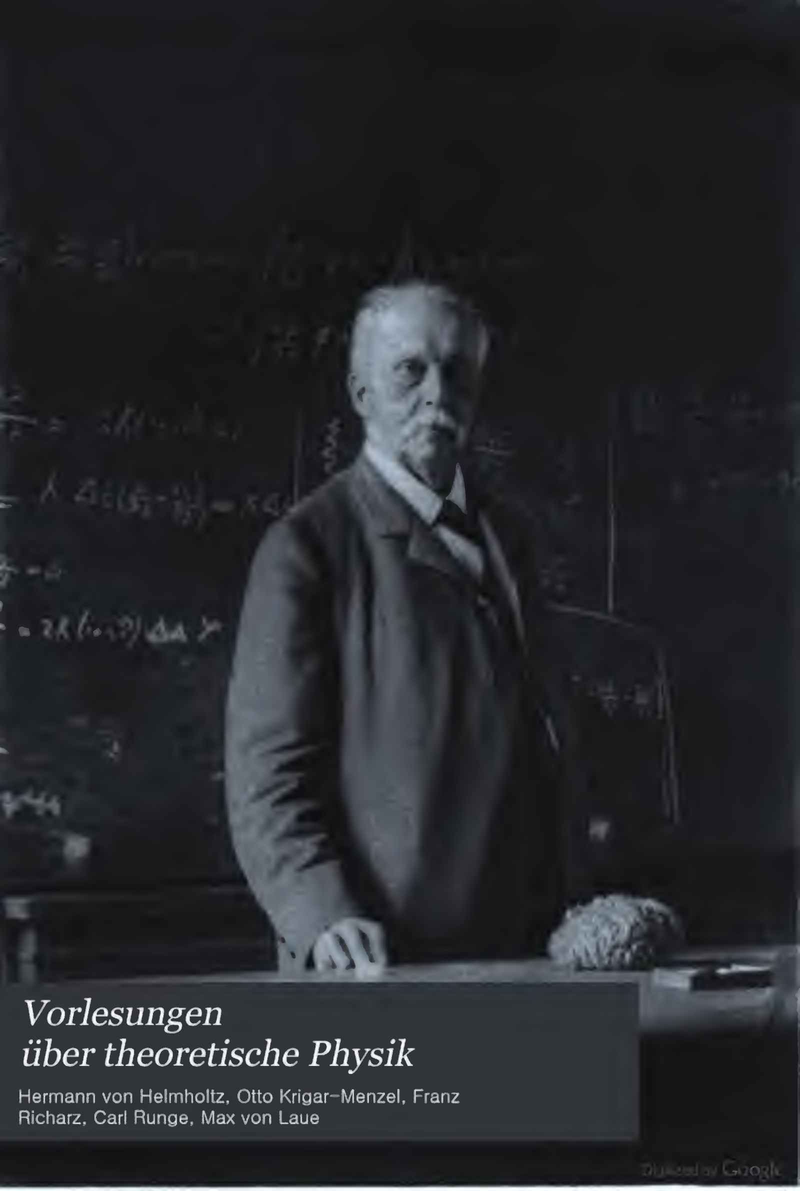


Vorlesungen über theoretische Physik

Hermann von Helmholtz, Otto Krigar-Menzel, Franz Richarz, Carl Runge, Max von Laue

Aufnahme von Dr. C.R. Mann

Gravure Meisenbach Riffarth & Co. Berlin

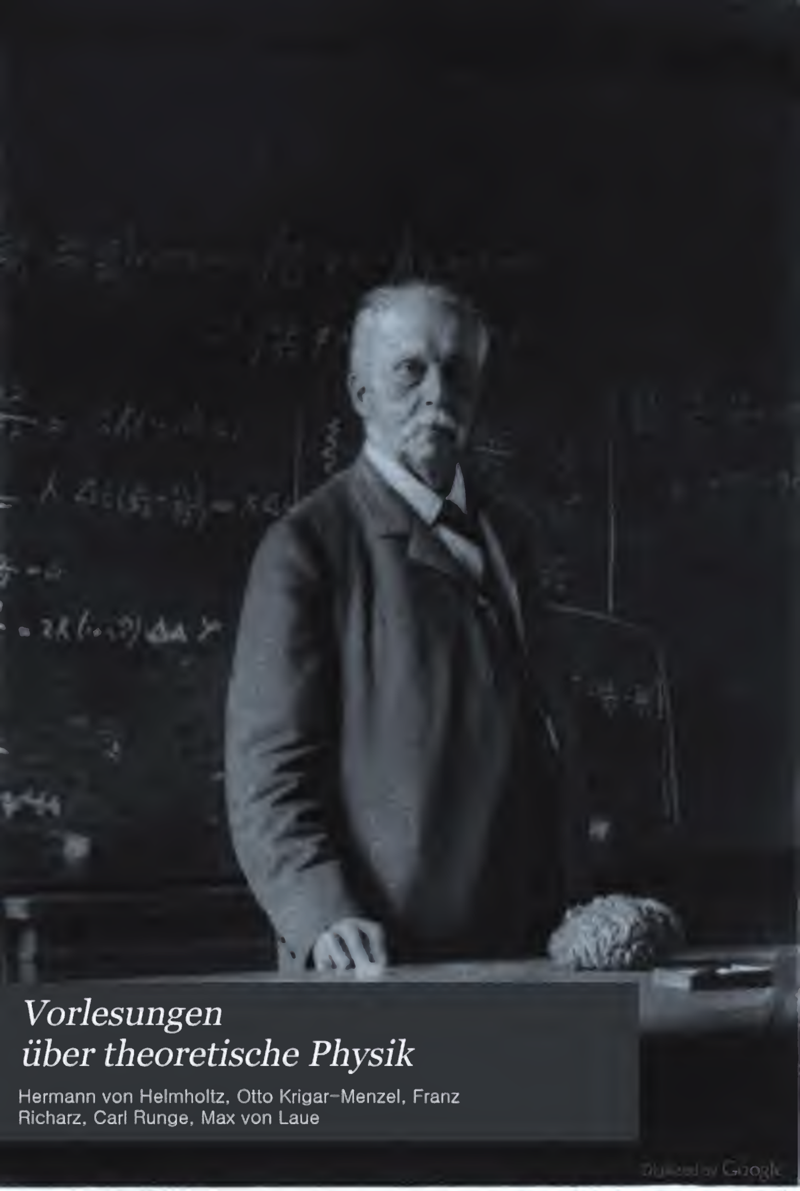


Vorlesungen über theoretische Physik

Hermann von Helmholtz, Otto Krigar-Menzel, Franz Richarz, Carl Runge, Max von Laue

Aufnahme von Dr. C.R. Mann

Gravure Meisenbach Riffarth & Co Berlin

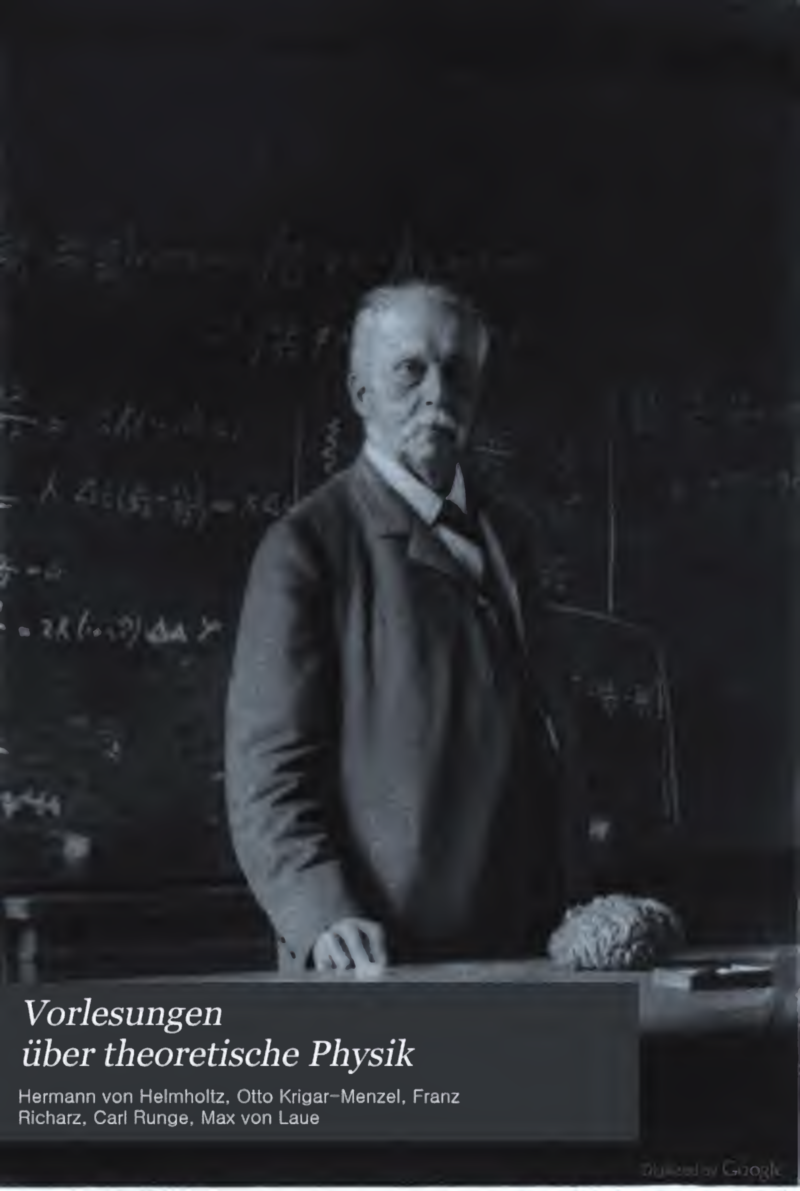


Vorlesungen über theoretische Physik

Hermann von Helmholtz, Otto Krigar-Menzel, Franz Richarz, Carl Runge, Max von Laue

Aufnahme von Dr. C.R. Mann

Gravure Meisenbach Riffarth & Co Berlin



Vorlesungen über theoretische Physik

Hermann von Helmholtz, Otto Krigar-Menzel, Franz Richarz, Carl Runge, Max von Laue

Aufnahme von Dr. C.R. Mann

Gravure Meisenbach Riffarth & Co. Berlin

VORLESUNGEN

ÜBER

THEORETISCHE PHYSIK

VON

H. VON HELMHOLTZ.

HERAUSGEGEBEN VON

ARTHUR KÖNIG, OTTO KRIGAR-MENZEL, FRANZ RICHARZ, CARL RUNGE.

BAND I.

ABTHEILUNG 1.

EINLEITUNG ZU DEN VORLESUNGEN ÜBER THEORETISCHE PSYSIK

HERAUSGEGEBEN VON

ARTHUR KÖNIG UND CARL RUNGE.

LEIPZIG,

VERLAG VON JOHANN AMBROSIUS BARTH.

1903.



Aufnahme von Dr. C. R. Mann — Gravure Meisenbach Riffarth & Co. Berlin

HERMANN von HELMHOLTZ.

Aufgenommen im kleinen Hörsaale des physikalischen Instituts zu Berlin am 7. Juli 1894.

Verlag von Leopold Voss in Hamburg

EINLEITUNG ZU DEN VORLESUNGEN

ÜBER

THEORETISCHE PHYSIK

VON

H. VON HELMHOLTZ.

HERAUSGEGEBEN VON

ARTHUR KÖNIG UND CARL RUNGE.

MIT 4 FIGUREN IM TEXT UND 1 PORTRÄT.

LEIPZIG,
VERLAG VON JOHANN AMBROSIUS BARTH.
1903.

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

Vorwort.

Im Herbst 1893 hat Helmholtz den Cyklus von Vorlesungen über theoretische Physik mit der vorliegenden Einleitung begonnen, die mein verstorbener Freund A. König herauszugeben übernommen hatte. Bei seinem Tode war etwa der erste Bogen in Fahnen gesetzt. Ich habe die Arbeit zu Ende geführt, indem ich mich, soweit es möglich war, an den wörtlichen Ausdruck der stenographischen Nachschrift gehalten habe.

Hannover, Mai 1903.

C. Runge.

Inhalt.

Einleitung.

Erster Abschnitt.

Die methodologischen Principien.

Zweiter Abschnitt.

Die Grundlagen der mathematischen Darstellung.

EINLEITUNG.

§ 1. Die Philosophie und die Naturwissenschaften.

Zwischen Philosophie und Naturwissenschaft hatte sich in der ersten Hälfte dieses Jahrhunderts, namentlich unter dem Einfluſs der SCHELLING-HEGEL'schen Identitätsphilosophie, ein wenig erfreuliches Verhältniſs entwickelt. Die Ursache lag wesentlich in dem tiefgreifenden Gegensatz der Methoden, die einander gegenseitig ihre Berechtigung bestritten. Die Spannung dauerte aber in ihrer ersten Bitterkeit nicht lange. Die Naturwissenschaften erwiesen vor Jedermanns Augen durch eine schnell auf einander folgende Reihe glänzender Entdeckungen, daſs ein gesunder Kern ungewöhnlicher Fruchtbarkeit in ihnen wohne und es konnte ihnen daher Achtung und Anerkennung auch von ihren principiellen Gegnern nicht dauernd versagt werden.

Daſs zu allen Zeiten die Menschen bemüht waren, eine, wenn auch schematische Kenntniſs des ganzen Zusammenhanges des Universums zu gewinnen, ist natürlich. Da nun die Erforschung der Thatsachen langsam geht und man andererseits in der Mathematik sah, daſs man auf Grund der gemeinsten alltäglichen Erfahrung, allein durch die Kraft des Denkens sehr allgemeine Gesetze finden konnte, so versuchte man es auch auf dem Gebiete der Erforschung naturwissenschaftlicher Gesetze mit dem sogenannten reinen Denken, mit der Speculation.

Die Täuschungen und Irrthümer, welche auf diesem Wege nothwendiger Weise nicht zu vermeiden waren, da man Abstracta und grammatikalische Ausdrücke als Realien behandelte und Resultate der ungeprüften Erfahrung als Denknothwendigkeiten ansah, haben eine Zeit lang die Philosophie in Verruf gebracht. Doch ist man darin viel zu weit gegangen; denn jedenfalls ist sie bei der Kritik der Methoden auch in den Naturwissenschaften berechtigt. Wir müssen doch das Instrument untersuchen, mit dem wir arbeiten.

Die Kritik der Methoden kann solange vernachlässigt werden, als man sich auf die Anwendung solcher Methoden beschränken kann, die sich bereits durch ihren Erfolg als richtig bewährt haben. Naht sich die Forschung solchen Grenzen, wo es zweifelhaft wird, ob die auftretenden Schwierigkeiten dem Stoffe oder der Unzulänglichkeit der Methode zuzuschreiben sind, so mufs jene Kritik eintreten. Daher ist neuerdings auch von den Naturforschern viel über philosophische Fragen discutirt worden. Es zeigt sich aber auch hierbei, dafs die Besprechung einzelner sporadischer Punkte wenig nützt; es mufs systematisch vorgegangen, untersucht und von Grund aus aufgebaut werden.

Weil nun in der systematischen Darstellung der Physik, als der Lehre von den allgemeinen Eigenschaften der Naturkörper, der deshalb nicht unpassend bei den englisch redenden Völkern der Name der „Natural Philosophy" geblieben ist, es mehr wie in irgend einem andern Zweige der Naturwissenschaft am Orte ist, allgemeine Gesichtspunkte an die Spitze zu stellen, so will ich hier zunächst die allgemeinen logischen und erkenntnifstheoretischen Principien in der wissenschaftlichen Methodik der Erfahrungswissenschaften vortragen, obschon ich dadurch von der allgemeinen Gepflogenheit ziemlich abweiche; denn für gewöhnlich verliert man bei dem Vortrage einzelner Zweige der Wissenschaften auf den Universitäten nicht viel Worte über die logischen Grundsätze, die den Untersuchungen, an die man herantritt, zu Grunde liegen.

Zu meiner persönlichen Rechtfertigung möchte ich darauf hinweisen, dafs ich aus langer Praxis eine ausgedehnte Kenntnifs über die zu behandelnden Probleme besitze und auch einige Erfahrung über die leichteste Beseitigung der bei naturwissenschaftlichen Arbeiten auftretenden Schwierigkeiten gewonnen habe. Da die Philosophen, bei denen ich mir Rath holen wollte, ihre Untersuchungen meist erst bei dem Wissen anfangen, was bereits in Worten ausgedrückt werden kann und die davorliegenden Processe des Sammelns von thatsächlicher Erfahrung meistens gar nicht oder doch nur vom Hörensagen kennen, so habe ich mir selbst helfen und mir die Dinge vielfach in eigener Weise zurecht legen müssen.

§ 2. Die physikalischen Wissenschaften.

Ehe wir aber zu einer näheren Darlegung der methodologischen Principien übergehen, müssen wie uns zunächst mit der Abgrenzung und dem Inhalte derjenigen Wissenschaften beschäftigen,

zu denen die nachfolgenden Betrachtungen als Einführung zu dienen bestimmt sind.

Die Physik können wir als die Lehre von den allgemeinen Eigenschaften der Naturkörper definiren. Unter diesen allgemeinen Eigenschaften sind hier aber nicht nur diejenigen Eigenschaften zu verstehen, die allen Naturkörpern ausnahmslos gemeinsam sind, sondern auch solche, welche nur grofsen ausgedehnten Klassen von ihnen zukommen. Als physikalische Wissenschaften bezeichnen wir diejenigen Wissenschaften, deren geistiges Geschäft zwar mit der Art der geistigen Arbeit in der Physik übereinstimmt, aber sich zum Theil nur auf eine eng begrenzte Klasse von Körpern oder manchmal auch nur auf bestimmte einzelne Körper und Körpersysteme beziehen. So hat z. B. die Chemie die Aufgabe die besonderen Eigenschaften zu erörtern, durch welche sich die einzelnen Elemente oder ihre Verbindungen von einander unterscheiden. In anderen Zweigen der physikalischen Wissenschaften werden nicht die unterscheidenden Eigenschaften sondern die Veränderungen besprochen, welche wir an bestimmten einzelnen Naturkörpern oder Systemen von Naturkörpern beobachten. Zu diesen zählt z. B. die Astronomie. Sie erörtert die Kräfte und die Bewegungsvorgänge, welche wir an den Himmelskörpern wahrnehmen. Eine andere Wissenschaft, die physikalische Geographie, bespricht die Vorgänge am Erdkörper, sowohl solche, welche den ganzen Erdkörper, als auch diejenigen, die nur grofse ausgedente Theile desselben betreffen. Die Meteorologie behandelt die Erscheinungen und Vorgänge in unserer Atmosphäre. Es sind dies also alles specielle und gesonderte Zweige, die zur Klasse der physikalischen Wissenschaften gehören, und die in Bezug auf die Methode der Behandlung mit der Physik übereinstimmen und die man daher auch wohl als Physik im weitesten Sinne bezeichnen könnte.

Die Physik in engerem Sinne, das was wir oben als Physik schlechthin bezeichneten ist also diejenige Wissenschaft, welche die allgemeinen Eigenschaften der Körper oder vielmehr aller Körper bespricht und kennen lehrt. Sie zerfällt in zwei gröfsere Abtheilungen, welche gewöhnlich gesondert von einander behandelt werden. Man pflegt sie als theoretische Physik einerseits und Experimentalphysik andererseits zu bezeichnen. Beide unterscheiden sich von einander sehr wesentlich durch die Art der geistigen Arbeit, welche bei den Untersuchungen angewendet wird; und so lange man mehr auf die äufserliche Art der geistigen Arbeit bei den einzelnen Wissenschaften geachtet hat, ohne das eigentliche Wesen dieser

Arbeit genauer zu untersuchen, war man geneigt, die theoretische Physik, die wohl auch als mathematische Physik bezeichnet wurde, streng und scharf von der Experimentalphysik zu trennen. Praktisch sondern sich in der That diese beiden Zweige der Physik oder genauer gesprochen diese beiden Behandlungsweisen in der Physik insofern, als von den Beobachtern und Studirenden die Einen mehr geneigt sind, experimentelle Untersuchungen zu machen, weil sie dazu besondere Geschicklichkeit haben, und über diejenige Art von Phantasie verfügen, die erforderlich ist, um neue lehrreiche Experimente aufzufinden, während die Anderen sich mehr bei der theoretischen mathematischen Seite der Arbeit befriedigt fühlen und darin auch geschickter sind. Es ist aber nicht zu vergessen, dafs die mathematischen Kenntnisse und die Uebung in der mathematischen Behandlung physikalischer Aufgaben eine wesentliche Rolle für Jeden spielen, der sich der Physik widmet, gleichviel ob er den Schwerpunkt seiner Thätigkeit mehr dem Experiment oder der Rechnung zuwendet.

Man wird bei weiterem Eindringen in die Physik allerdings von rein praktischen Gesichtspunkten aus gut thun, sich darüber zu entscheiden, ob man der einen oder der anderen Richtung folgen will und dementsprechend der einen oder anderen Richtung mehr Fleifs zuwenden. Doch mufs gleich von vorn herein betont werden, dafs Experimentalphysik ganz ohne mathematische Physik eine sehr eng begrenzte Wissenschaft ist und wenig Einsicht in den Vorgang der physikalischen Erscheinungen giebt, während das Umgekehrte, mathematische Physik ohne Experimentalphysik ebenfalls eine ziemlich lahme und unfruchtbare Wissenschaft sein würde, weil man nicht wohl thut, Theorien über Naturvorgänge zu machen, ehe man diese Vorgänge aus eigener Anschauung kennen gelernt hat.

Man pflegt bei der systematischen Darstellung der verschiedenen Wissenschaften gewöhnlich nicht viel Worte und Betrachtungen über die logischen Grundsätze zu verlieren, die den Untersuchungen, an die man herantritt, zu Grunde liegen; aber gerade bei der Physik ist dieses doch bis zu einem gewissen Grade nothwendig.

Erster Abschnitt.

Die methodologischen Principien.

§ 3. Kritik der alten Logik.

Die Lehre vom wissenschaftlichen Denken, die Logik, ist uns, nachdem sie von Aristoteles entwickelt worden, durch die scholastischen Philosophen des Mittelalters überliefert und seitdem in der Hauptsache stehen geblieben. Sie spricht, wie oben schon erwähnt, nur von dem Wissen insofern es in Worten ausgedrückt ist und dieses Wissen tritt in der Form eines Urtheils auf. Ein Urtheil erscheint grammatikalisch als Satz, der zwei Begriffe, Subject und Prädicat verbindet. Neue Urtheile werden durch Schlüsse gewonnen.

Wir brauchen dabei einen allgemeinen Satz, den wir bezeichnen als den Major des Schlusses, und einen speciellen Satz, den Minor, welcher letztere sich nur auf einzelne Objecte zu beziehen braucht, sogar unter Umständen nur auf ein einziges Object, während der Major zu einem allgemeinen und vollkommen sicheren Schlusse nur gebraucht werden kann, wenn er einen allgemeinen Satz ausdrückt, der für alle Objecte einer gewissen Klasse giltig ist. Nun wird in der Logik, wie sie gewöhnlich als Theil der philosophischen Wissenschaften vorgetragen wird, über die Herkunft des Major und des Minor gewöhnlich keine Auskunft gegeben. Es wird vorausgesetzt, dafs dergleichen Sätze gefunden werden können, und die Auseinandersetzungen in der Logik beziehen sich nur auf die Art der Verbindung zwischen ihnen und auf die Grenzen des Schlusses, welche man aus gegebenem Major und Minor ermitteln kann. Deshalb beschränkt sich die gewöhnliche Logik darauf, die Wege und Methoden anzugeben, wie man aus gewissen bekannten und gegebenen Sätzen neue Sätze finden, d. h. wie man den Schlufs, die Conclusio ziehen könne; sie giebt aber keinen Aufschlufs darüber, wie man nun zu

den ursprünglichen Sätzen, dem Major und dem Minor, gelangt ist. In der Regel sind dieses ja Sätze, die durch eine andere Autorität gegeben sind. In solchen Fällen ist die Bildung der Conclusion niemals die Erzeugung einer neuen Wahrheit. Das tritt noch klarer hervor, wenn man überlegt, dafs der Regel nach der Major gar nicht mit Sicherheit aufgestellt werden kann, wenn man nicht schon weifs, dafs auch dasjenige Object, welches in dem Minor genannt ist und welches das Subject des Minor bildet, unter den Major gehört, und dafs der Major auch in Bezug auf dieses Subject richtig ist. Wenn man nun den Major nicht selbst aufgestellt hat, also nicht unabhängige Quellen für die Richtigkeit des Major besitzt, wird durch den Schlufs nachher weiter nichts mehr gesagt, als dafs das Object unter den Major gehört, also dasselbe behauptet, was man eben vorher schon wissen mufs, ehe man überhaupt den Major aufstellen kann. In diesem Sinne ist auch der Name der Logik, welcher ja ursprünglich Sprechkunst bedeutet, vollkommen gerechtfertigt. Denn in der weitaus gröfsten Mehrzahl der Fälle sind die ursprünglichen Sätze, von denen man ausgeht, auf schriftlichem oder mündlichem Wege überliefert, und die alte, gewöhnlich vorgetragene Logik ist im Wesentlichen nichts anderes, als eine Anweisung darüber, wie man diese Sätze richtig auszudrücken hat, sodafs sie den verlangten Sinn erhalten, und dafs derjenige, welcher sie verstehen will oder soll, den richtigen Sinn mit ihnen verbindet. Sie ist also im Wesentlichen weiter nichts als eine Anweisung für den Einen, richtig zu sprechen, für den Andern, richtigen Sinn den gesprochenen Sätzen unterzulegen. Es kommt also in dieser ganzen Reihenfolge von logischen Operationen nichts von Erzeugung neuer Kenntnifs vor; während wir, in fundamentalem Unterschiede dazu in den Naturwissenschaften Kenntnisse zu gewinnen haben, die bisher noch nicht gewonnen sind, und welche uns kein Anderer auf seine Autorität hin mittheilen kann. Wenigstens sind es gerade dergleichen bis dahin unbekannte Sätze, welche den Haupttheil der Naturwissenschaft und ihr wichtigstes Element bilden. Daher weichen auch die Denkoperationen, welche wir bei den Ueberlegungen in der Naturwissenschaft auszuführen haben wesentlich ab und zeigen einen bestimmten fundamentalen Unterschied von denjenigen Denkoperationen, welche in der bisherigen Logik an überlieferter Weisheit vorgenommen werden. Es ist daher nothwendig, zunächst einige kurze Auseinandersetzungen über das logische Geschäft zu machen, welches wir in den naturwissenschaftlichen, physikalischen Untersuchungen auszuführen haben.

§ 4. Die Begriffe und ihre Connotationen.

Das Ziel der physikalischen Wissenschaften müssen wir darin sehen, die Naturerscheinungen zu begreifen. „Begreifen“ aber heifst: Begriffe bilden. Wenn wir nun die Bildung der Begriffe, die Ueberordnung und Unterordnung derselben kennen lernen wollen, so giebt uns dafür die gewöhnliche Logik folgendes Verfahren an. — Wir fassen zunächst diejenigen Objecte zusammen, die sich in gewisser Beziehung gleich verhalten und bestimmen durch eine Charakteristik, die man als die Definition dieser Klasse zu bezeichnen pflegt, diejenigen Objecte, welche wir zu der Klasse rechnen wollen. Das Aufstellen der Definition besteht also darin, denjenigen Complex von Eigenschaften zu finden, welcher nothwendig bei allen Objecten der Klasse vorhanden ist. Wenn man in dieser Weise einen solchen Complex von Eigenschaften gefunden hat, welcher allen Objecten der betreffenden Klasse zukommt und hingegen bei allen Objecten, die man zu anderen Klassen rechnen will, fehlt, so ist damit die Abgrenzung dieser Klasse von Objecten von allen andern Objecten gegeben: sie sind zu einem Begriffe zusammengefafst. Das ist die gewöhnliche Beschreibung der Bildung der Begriffe nach den Erfordernissen der gewöhnlichen Logik. Nun hat aber John Stuart Mill auf einen wesentlichen Unterschied aufmerksam gemacht, der zwischen den verschiedenen Merkmalen besteht, welche zu den Definitionen des Begriffes gebraucht werden. Es tritt besonders in den naturgeschichtlichen Wissenschaften sehr deutlich hervor, dafs man in einer aufserordentlich grofsen Zahl von Fällen aufser denjenigen Merkmalen, die zur Definition einer Klasse oder einer Art, also des Begriffes, ausreichen und nothwendig sind, noch andere Merkmale findet, die bei allen Einzelwesen der betreffenden Art oder Klasse vorkommen. An einem Beispiele können wir uns diese Eigenthümlichkeit leicht klar machen. Wählen wir dazu den Begriff „Säugethier“. Wir können die Klasse der Säugethiere dadurch begrenzen, dafs wir definiren: „Säugethiere sind Thiere, welche lebendig geboren und von ihren Müttern gesäugt worden sind.“ Dadurch würden wir alle übrigen Thiere, alle Vögel, Amphibien u. s. w. ausschliefsen. Nun findet sich, dafs aufser dieser Eigenthümlichkeit ihrer Ursprungsweise und jugendlichen Ernährungsart noch eine Reihe von anderen Eigenthümlichkeiten des anatomischen Baues existirt, welche ebenfalls allen Säugethieren gemeinsam ist. Wir finden nämlich bei allen, dafs sie warmblütig sind, dafs sie einen doppelten Blutkreislauf haben, indem das Blut, ehe es seine ganze

Bahn durchlaufen hat, zweimal zum Herzen zurückkehrt, dafs ferner gewisse Eigenthümlichkeiten in der Bildung der Gehörknöchelchen und des Unterkiefergelenks bestehen, u. s. w. Alle diese gemeinsamen Eigenthümlichkeiten könnten also auch als Unterscheidungsmittel der Säugethiere gebraucht werden, da sie den Vögeln, Amphibien, Fischen u. s. w. nicht zukommen. Wenn demnach eine Definition von einer Klasse, die wir mit einem gemeinsamen Namen bezeichnen wollen, aufgestellt werden soll, so haben wir zwischen zwei verschiedenen Arten von Merkmalen zu unterscheiden: die eine Art ist nothwendig, aber auch ausreichend, um die Definition zu geben, die Klasse abzugrenzen und den Namen festzustellen; daneben kann aber auch noch eine andere Art von Merkmalen vorkommen, welche zwar immer bei allen Individuen der betreffenden Klasse vorhanden, aber für die Definition nicht nothwendig sind. Wenn wir z. B. ein Thier finden, welches lebendig geboren und von seiner Mutter gesäugt worden ist, so werden wir es für ein Säugethier erklären und nicht weiter verlangen, wenigstens nicht, um den Namen und die Klasse des Thieres festzustellen, dafs auch noch jene anatomischen Eigenthümlichkeiten in Beziehung auf die Bildung der Gehörknöchelchen und die Bildung des Herzens u. s. f. nachgewiesen werden müfsten. Stuart Mill war der erste, welcher diese wichtige Unterscheidung machte und also diejenigen Eigenschaften, welche in die Definition eines Begriffes hinein gehören, und an und für sich zusammen genommen genügend sind, die Definition festzustellen, von den Eigenschaften trennte, die aufserdem noch immer bei den einzelnen Wesen vorhanden sind, — die unter den Begriff gehören. Letztere Eigenschaften bezeichnete er als die Connotationen des Begriffes. Dies ist nun eine sehr wesentliche und wichtige Unterscheidung, die eine ganz hervorragende Rolle spielt bei dem Gebrauch solcher begrifflichen Bestimmungen. Wenn eine solche Connotation gefunden werden kann für diejenigen Objecte, welche unter einen bestimmten Begriff gefafst sind, so kann man allgemeine Urtheile bilden, z. B. in der Weise, dafs wir sagen: alle Säugethiere besitzen mindestens drei Gehörknöchelchen, haben einen doppelten Blutkreislauf und sind warmblütig. Hierin sind die drei Aussagen über die Säugethiere solche Connotationen. Nun zeigt sich in der That — und es erklärt sich auch sehr leicht, warum sich das zeigt —, dafs bei den Classificationen, welche der Bildung der menschlichen Sprache zu Grunde liegen und die Namengebung bestimmen, vorzugsweise solche Begriffe gebildet worden sind, die Connotationen zulassen. Denn es würde uns nicht viel helfen, wenn

wir irgend welche beliebigen Definitionen aus beliebigen Merkmalen zusammenwürfeln wollten. Wir könnten ja z. B. alle Pflanzen in eine Klasse zusammenfassen, welche blaue Blüthen haben, und dieser Klasse einen besonderen Namen geben. Aber die Definition einer solchen Klasse würde keine Connotationen zulassen, denn wir könnten von diesen Objecten weiter nichts Gemeinsames aussagen, als das, was in ihrer Definition bereits ausgesagt ist, nämlich, dafs sie Pflanzen seien und blaue Blüthen hätten. Alle allgemeinen Sätze, welche wir in Bezug auf solche Klassen aufstellen könnten, würden daher nothwendig tautologische Sätze sein. Wenn wir also neue Begriffe bilden, so müssen wir suchen, solche Begriffe zu bilden, denen wenigstens eine Connotation zukommt; anders zu verfahren wäre sehr unnütz. Unsere Sprache ist nun schon gebildet unter dem Einflufs dieses Gesichtspunktes; denn auch ohne streng wissenschaftliches Studium lernt der Mensch durch die tägliche Beobachtung eine grofse Menge von solchen Beziehungen kennen, wie sie eben dargelegt worden sind. Ueber diese Kenntnifs geben wir uns freilich nicht immer Rechenschaft, namentlich aber werden wir uns nur selten bewufst, wie wir diese Kenntnifs erlangt haben. Bei einem ruhig und verständig beobachtenden Volke mufs sich aber ein solcher Einflufs auf die Sprache nothwendig weiter entwickeln, und zum Theil ist es wohl hierauf zurückzuführen, dafs die civilisirteren Völker auch feiner ausgebildete Sprachen haben, Sprachen, in denen mehr diejenigen Begriffe betont sind, von denen man Allgemeines aussagen kann, also welche Connotationen haben.

§ 5. Die Gattungsbegriffe und die Naturgesetze.

Diese Art der Bildung von Begriffen ist nun in ziemlich breiter Weise in den sogenannten naturgeschichtlichen Wissenschaften durchgeführt. Diese beziehen sich meistentheils nur auf die Beschreibung von Naturobjecten, die dauernd in der uns umgebenden Natur existiren, beziehlich durch die Zeugungsprocesse des thierischen Körpers immer wieder in gleicher Form hergestellt werden, sodafs immer eine grofse Menge von Exemplaren jeder Klasse sich vorfindet. Bei diesen haben wir also fast nur den dauernd bestehenden Zustand zu beschreiben, denn erst in neuerer Zeit hat man angefangen, sich mit den Veränderungen zu beschäftigen, welche an solchen Naturkörpern im Laufe mehrerer Generationen vor sich gehen können. Im Gegensatz dazu haben es nun die physikalischen Wissenschaften überwiegend mit Veränderungen zu thun, die sich an Naturobjecten vollziehen.

Wenn wir früher gesagt haben, dafs die physikalischen Wissenschaften die allgemeinen Eigenschaften der Naturkörper zu bestimmen suchen, so steht das mit dem hier Gesagten in keinem Widerspruch; denn die hier betrachteten Eigenschaften der Naturkörper kommen für uns nur zur Beobachtung, indem wir Veränderungen wahrnehmen. Wir suchen in den physikalischen Wissenschaften zu ermitteln, welche Veränderungen überhaupt vorkommen können und welche äufseren Einwirkungen und Umstände vorhergehen müssen, um solche Veränderungen hervorzubringen, oder auch, was vorhergehen mufs, um das Eintreten von solchen Veränderungen zu verhindern. Also das, was wir in den physikalischen Wissenschaften zusammenzufassen haben, wofür wir also etwas dem Geschäfte der Begriffsbildung bei den Naturkörpern ganz Analoges auszuführen haben, sind Veränderungsvorgänge, die wir an den Objecten der Aufsenwelt beobachten. Wenn wir nun aber solche Veränderungen begreifen wollen, so müssen wir auf sie dasselbe Verfahren anwenden, welches wir bei der Betrachtung der Naturobjecte als praktisch erfunden haben: wir müssen solche Fälle zu Klassen zusammenstellen, in denen aufser den Umständen, welche zur Definition d. h. zur Abgrenzung der betreffenden Gruppe von Vorgängen dienen, auch noch andere gleichartige, gemeinsame Aenderungen, d. h. in ihrem Ablauf einander gleichende Veränderungen vorkommen. Es ist also im Wesentlichen wiederum dieselbe Aufgabe, nur ist hier die sprachliche Bezeichnung etwas anders. Denn für eine solche Klasse, welche eine Anzahl in gleicher Weise hervorgebrachter und ablaufender Veränderungen enthält, können wir einen sprachlichen Ausdruck nur geben in der Form eines Naturgesetzes. „Zwei schwere Körper die sich in endlicher Entfernung von einander im Raume befinden, erleiden eine Beschleunigung und zwar jeder einzelne von ihnen in der Richtung gegen den andern hin“, d. h. sie bewegen sich in dieser Richtung mit wachsender Geschwindigkeit auf einander zu. Das ist eine Thatsache, die sich immer zeigt, wenn keine Umstände vorhanden sind, die hindernd einwirken, z. B. Beschleunigungen die in ganz derselben Weise von dritten Körpern in entgegengesetzter Richtung ausgeübt werden, und eine Thatsache, welche in dieser Form immer ausgesprochen werden kann und soeben auch in der Form eines Naturgesetzes ausgesprochen ist.

Ebenso wie wir also in den beschreibenden Naturwissenschaften, der Zoologie, der Botanik u. s. w. Klassen von Naturkörpern zu Begriffen zusammenfassen und deren Connotationen suchen, so haben wir in den physikalischen Wissenschaften die ganz gleiche logische

Aufgabe, nur dafs sie sich hier auf Vorgänge bezieht. Wir haben nämlich die Aufgabe, solche Fälle von Veränderungen und Vorgängen als Klassen zusammenzugreifen, bei denen aufser den beobachteten gleichartigen Umständen, welche der Definition des Begriffes entsprechen, noch regelmäfsig andere Vorgänge stattfinden, welche also den Connotationen des Begriffes analog sind.

Eine andere Gruppe von Naturvorgängen können wir zusammenfassen in folgendem Satz: „Ein Lichtstrahl, der durch die Grenze zweier verschiedenartiger durchsichtiger Medien hindurchgeht, erleidet eine Brechung, und zwar ist die Abweichung von dem früheren Wege gegeben durch eine bestimmte trigonometrische Beziehung.“ Das erste der beiden angeführten Naturgesetze bezieht sich also auf Ortsveränderungen schwerer Körper, das zweite auf Richtungsänderungen eines Lichtstrahls. Solche Beispiele können wir nun sehr mannigfaltig häufen, und jeden regelmäfsig in der Natur eintretenden Vorgang in dieser Weise zunächst nach seinem thatsächlichen Gehalt als Gesetz aussprechen. Wir brauchen dazu nur die Bedingungen genau zu definiren, unter denen die betreffende Erscheinung sich vollzieht, und dann genau anzugeben, wie der Vorgang weiter verläuft. Es wäre dieses also weiter nichts als eine Beschreibung der thatsächlich beobachtbaren Vorgänge.

§ 6. Naturgesetz, Kraft und Ursache.

In dem sprachlichen Ausdruck weichen wir nun meistentheils von der bisher angegebenen Formulirung der Naturgesetze ab, indem wir Abstracta bilden und statt der Verba Substantiva einsetzen, z. B. das erste der oben angeführten Gesetze in der Form aussprechen, dafs zwischen je zwei schweren Körpern, die sich in endlicher Entfernung von einander im Raume befinden, fortdauernd eine Anziehungskraft von bestimmter Gröfse besteht. Wir haben damit statt der einfachen Beschreibung des Phänomens der Bewegung ein Abstractum, die Anziehungskraft, eingeführt. Wir bezeichnen damit in der That weiter nichts, wenigstens nichts, was noch einen factischen Sinn hat, als was auch in der blofsen Beschreibung des Phänomens enthalten ist. Wir versichern nur durch die Aufstellung des Gesetzes in dieser Form, welches den Begriff der Kraft benutzt, auch dafs dieses Phänomen der gegenseitigen Annäherung der beiden Körper, sobald die Bedingungen dazu gegeben sind, in jedem Zeitmoment eintritt.

Nun weifs man über eine solche Kraft weiter nichts Thatsäch-

liches anzugeben, als dafs, so oft sie wirkt, oder die Bedingungen eintreten für ihre Wirksamkeit, das betreffende Phänomen beobachtet werden kann. Es ist also ein in gewissem Sinne leeres Abstractum, welches aber, wenn es richtig verstanden wird, in der That die wirklich vorkommenden Phänomene beschreibt. Andererseits ist aber doch zu beachten, dafs durch die Einschiebung des Begriffes der Kraft in die Formulirung eines Gesetzes etwas hinein gekommen, was leicht als ein hypothetisches Element angesehen werden kann, und was eigentlich durch die Thatsachen nicht gegeben. Thatsächlich hat diese Ausdrucksweise auch so lange man sich nicht ihren Sinn völlig klar gemacht hatte mannigfachen Anstofs erregt; sie ist vielfach in der Weise mifsverstanden worden, dafs man dieses abstracte Substantiv die Kraft als die Bezeichnung von irgend etwas wesentlich Existirenden aufgefafst hat, und dafs man sich berechtigt glaubte, bestimmte Sätze über die wesentlichen Eigenschaften der Kräfte aufzustellen, welche in der That, wenn richtig, entweder Tautologieen waren oder nur scheinbar einen reellen Inhalt hatten. In Folge davon haben in neuerer Zeit viele Physiker, denen es darum zu thun war, nichts in die Wissenschaft hinein zu tragen, als was reiner Ausdruck der Thatsachen war, danach gestrebt, auch den Ausdruck der Thatsachen so einzurichten, dafs in ihm nichts Hypothetisches untergeschoben wäre. Es war wohl zuerst Faraday, der in dieser Richtung sich bemüht hat. Faraday hatte nicht den normalen Bildungsgang eines gelehrten Physikers durchgemacht, sondern war durch eigene Intelligenz und eigene Einsicht zu dem gröfsten Theil seiner Kenntnisse gekommen. Er war ursprünglich ein armer Buchdruckerlehrling, der die Bücher, welche er zu heften hatte, auch zu lesen begann, und dadurch seine Kenntnisse schnell vermehrte. Späterhin kam er in Berührung mit dem berühmten Chemiker Humphrey Davy, der sich für den offenbar sehr intelligenten Knaben so interessirte, dafs er ihn zunächst als Assistenten, oder vielleicht besser gesagt, als Laboratoriumsdiener annahm. Von dieser Stellung aus schwang sich dann Faraday, dem Humphrey Davy bald einen Theil seiner Vorlesungen übertrug, zu grossem Ansehen in der Welt empor. Der Keim zu seinen aufserordentlich bedeutenden wissenschaftlichen Entdeckungen und besonders das Originale seiner Anschauungsweisen ist wesentlich in dem Umstande zu suchen, dafs er den gewöhnlichen Weg der Wissenschaft nicht kannte, sondern von Anfang an darauf angewiesen war, sich seinen eigenen Weg für das Verständnifs der Erscheinungen zu suchen. Es war nun Faraday das Hypothetische, was ihm in

der Einschiebung der Kräfte zu liegen schien, sehr zuwider. Dazu kam, dafs er gewisse Eigenschaften, welche die Physiker den Kräften beilegten, sich nicht vorstellen konnte; namentlich polemisirte er von Anfang an gegen die Vorstellung von der Wirkung in die Ferne durch den leeren Raum, und es gelang ihm in der That, für diejenigen Erscheinungen, für die er sich am meisten interessirte, nämlich für die magnetischen und elektrischen Kräfte, eine Deutung zu finden und auch die damit zusammenhängenden Thatsachen nachzuweisen, welche die bis dahin angenommenen Fernkräfte für die magnetischen und elektrischen und elektro-magnetischen Erscheinungen fallen liefs. Faraday war durch diese Art seiner Anschauung gezwungen, sich seine eigene Nomenclatur zu bilden. Hierin war er aber nicht glücklich, denn es gelang ihm nicht, das Wesen dessen, was er erstrebte, methodisch klar zu machen. Seine Zeitgenossen wufsten ihm in dieser Darstellung nicht zu folgen, und deshalb dauerte es lange, fast bis in die folgende Generation hinein, ehe sich Mathematiker fanden, welche den Sinn von Faraday's Bezeichnungsweise entziffern konnten; unter ihnen ist in erster Reihe Maxwell zu nennen. Neben Faraday und Maxwell war es namentlich Sir William Thomson (der jetzige Lord Kelvin), welcher in der mathematischen Physik alle solche bildlichen und abstracten Ausdrücke zu vermeiden suchte. Später hat sich diesen auch Gustav Kirchhoff angeschlossen, der geradezu in der Vorrede zu seinem Lehrbuch der Mechanik sagt: Die Aufgabe der Mechanik ist, die in der Natur vor sich gehenden Bewegungen vollständig und auf die einfachste Weise zu beschreiben. Es kommt ihm also wesentlich nur auf eine genaue Beschreibung der Phänomene an. Was ich nun zu diesem Ausdrucke von Kirchhoff hinzufügen möchte, besteht darin, dafs nun aber die möglichst vollständige und einfachste Beschreibung nur in der Art gegeben werden kann, dafs man die Gesetze ausspricht, welche den Phänomenen zu Grunde liegen. Andererseits ist aber doch zu erwähnen, dafs auch die abstracte Bezeichnungsweise ihre Vortheile hat, um das Gesetz als solches zu charakterisiren, und dafs die Bildung eines solchen Abstractums mit seiner substantivischen Bezeichnung, doch auch durch Momente gegeben ist, die ebenfalls in der Natur der Sache liegen. Wenn wir das Gesetz als solches aussprechen, so sprechen wir eine Erfahrung aus, von der wir voraussetzen dürfen, dafs sie sich immer wiederholen wird, so oft die Bedingungen gegeben sind, unter denen das betreffende Phänomen zu Stande kommen kann. Das, was das Gesetz aussagt, tritt, wie wir wohl wissen und durch Erfahrung

jeden Augenblick bestätigen können, unabhängig von unserem Vorstellen ein, unabhängig von unseren Wünschen. Wir wissen, dafs wir durch die Vorstellungen, die wir gleichzeitig haben, gar keinen Einflufs auf den Ablauf der äufseren Processe auszuüben im Stande sind, und wir können daher mit einer vielfach noch gebrauchten Terminologie der philosophischen Wissenschaft diese Thatsachen, welche nach dem Gesetz zu Stande kommen, bezeichnen als ein Nicht-Ich, als Etwas, was nicht von unserem Vorstellen, von unserem Bewufstsein, von unserem Willen und unseren Wünschen abhängig ist, was wir nur als Thatsache constatiren können, wenn es eintritt. Je genauer und eingehender unsere Untersuchung ist, desto mehr überzeugen wir uns, dafs der Eintritt dieser Phänomene nur abhängig ist von gewissen äufseren Bedingungen, aber ganz unabhängig von den Vorgängen in unserer Seele. Wir müssen das Gesetz also als Etwas anerkennen, was ganz unabhängig von unserem Vorstellen und unseren Wünschen vor sich geht, und, wir müssen ferner anerkennen, dafs diese betreffenden Erscheinungen eintreten werden in jedem beliebigen Augenblick, wo die Vorbedingungen gegeben sind, so dafs diese Macht, die uns da gegenübertritt und welche ohne unser Eingreifen und ohne unser Vorstellen solche eigenthümlichen Erfolge hervorrufen kann, anerkannt werden mufs als etwas Dauerndes, was in jedem Augenblicke wirkungsbereit vorhanden ist, und zwar als etwas Mächtiges vorhanden ist, das seine Wirkung eventuell gegen unseren Willen und gegen unsere Wünsche durchsetzt. Darin liegt doch mehr, als in der blofsen Auffassung einer Thatsache als Thatsache, und wir pflegen nun solche Dinge, welche beharrlich bestehen und welche sich als mächtig erweisen und die Aufsenwelt zwingen, ohne dafs wir selbst einzugreifen brauchen, mit den Namen zu bezeichnen, die wir für thatsächlich bestehende Dinge anzuwenden pflegen, und dadurch ist also, wenn wir es richtig auffassen, die Bezeichnung einer solchen Kraft als eines dauernd bestehenden Agens vollkommen gerechtfertigt. Erst durch diese Bezeichnungsweise ist ausgesagt, dafs das Gesetz, das wir gefunden haben, nun auch in jedem Augenblicke wirkungsbereit ist und in jedem Augenblicke seine Macht erweisen kann. Das ist offenbar der wesentliche Grund gewesen, weshalb die Menschen allgemein zu der substantiven Bezeichnung übergegangen sind und vorgezogen haben, statt von Gesetzen von Kräften zu sprechen, obgleich dem thatsächlichen Sinne nach, was nicht oft genug wiederholt werden kann, der substantive Ausdruck, bei welchem wir von einer Kraft sprechen, die in bestimmter Weise wirkt, factisch nichts anderes

bezeichnet und keinen andern reellen Inhalt hat, als dafs wir dadurch ausdrücken: das Gesetz wird sich zeigen in jedem Falle, wo die Bedingungen für seine Erscheinung gegeben sind. Von diesem hypothetischen Substantivum, als welches wir die Kraft betrachten müssen, wissen wir weiter nichts, als dafs es in seinem Wesen liegt, die bestimmte Wirkung hervorzubringen. Zunächst ist nun zu bemerken, dafs wir in Folge der aufserordentlich grofsen Mannigfaltigkeit der äufseren Erscheinungsweise auch die allerverschiedensten Arten von Kräften annehmen.

Die Beschleunigung der Weltkörper gegen einander bezeichnen wir als die Wirkungen einer Anziehungskraft, welche die schweren Körper gegen einander ausüben; bei der Lichtbrechung reden wir von einer Lichtbrechungskraft, die wir den durchsichtigen Körpern zuschreiben; in anderen Fällen finden wir, dafs bestimmte Zusammensetzungen von Metallen und leitenden Flüssigkeiten elektrische Ströme hervorbringen, und indem wir die Stärke dieser elektrischen Ströme messen und die Bedingungen genauer bestimmen, unter denen sie eintreten und von denen ihre Stärke abhängt, sprechen wir von der elektro-motorischen Kraft einer galvanischen Batterie, u. s. w. Kurz, wir nehmen also die verschiedenartigsten Kräfte an und machen in dieser Hinsicht zunächst keine Beschränkung. Später, wenn wir die Kräfte im Einzelnen untersuchen, werden wir allerdings auf besondere Betrachtungsweisen stofsen, welche einen gewissen Zusammenhang und eine gewisse Verwandtschaft zwischen den einzelnen Kräften nachweisen.

Es läfst sich leicht zeigen, dafs diese Abstracta, Kraft und Naturobjecte oder Körper, denen wir die Kraft zuschreiben, nicht von einander getrennt werden können. Wenn wir von Bewegungskräften reden, so pflegen wir das, was bewegt werden kann, einfach als die Masse oder als die bewegliche Materie zu bezeichnen. Eine Kraft ohne Materie hat keinen Sinn; das würde einem Gesetze entsprechen, welches da von Veränderungen spräche, wo keine Objecte wären, welche verändert werden könnten. Ein solches Gesetz würde sich selbst widersprechen und sich selbst aufheben; und eben so wenig würde es einen Sinn haben, von Materie ohne Kraft zu sprechen; denn solche materiellen Gegenstände könnten keinen Veränderungen unterworfen sein, da Veränderungen immer die Existenz einer Kraft voraussetzen. In dieser einfachen Betrachtung zeigt sich schon, dafs das materielle Object und die Kraft, zwei Abstracta sind, die nicht von einander getrennt werden dürfen,

welche einen bestimmten Sinn nur in ihrer gegenwärtigen Beziehung und in ihrer Vereinigung haben.

Mannigfache Irrungen sind in der Wissenschaft dadurch entstanden, dafs man den eigentlichen Sinn, der mit dem Worte „Kraft“ zu verbinden ist, vergafs und das, was mit einem substantivischen Wort ausgedrückt wurde, nun auch als ein reelles Ding auffafste, das unabhängig existiren könnte.

Es war lange Zeit, namentlich in den physiologischen Wissenschaften, die Rede davon, dafs möglicherweise die „Lebenskräfte“ losgelöste Kräfte sein könnten, welche nicht von einer Materie abhängen, und dafs man ebenso die Seele des Menschen als eine Kraft betrachten könne, die an keiner Materie haftete, die also losgelöst wäre von den Objecten, an denen die Aenderung vor sich gehen soll. Das hat aber, sobald man sich über die Entstehung der Begriffe von Kraft und Materie klar ist, keinen Sinn mehr.

Man hatte bei jenen Anschauungen den ursprünglichen Sinn der Bezeichnungsweise vergessen und betrachtete die abstracten Bezeichnungen als Bezeichnungen wirklicher Dinge.

Dafs dergleichen Irrthümer vorgekommen sind, und dafs daran sich allerlei falsche und unzulässige Vorstellungen in der Entwickelungsgeschichte der Wissenschaft geknüpft hatten, hat späterhin das Mifstrauen gegen diese ganze Bezeichnungsweise hervorgerufen, und manche, welche solche Irrthümer unbedingt vermeiden wollten, veranlafst, von jeder abstracten Bezeichnung abzusehen und ihre Darstellung der Naturvorgänge auf eine blofse Beschreibung auch dem Wortlaute nach zu reduciren.

Wir haben noch eine andere Bezeichnung, die sich auf diese Verhältnisse bezieht, freilich mit einer gewissen Modification der Bedeutung. Es ist das die „Ursache“. Wir bezeichnen die Kräfte insofern, als sie als der Grund vorgestellt werden, welcher Veränderungen hervorbringen kann, auch als die Ursachen der eintretenden Veränderungen. Wenn wir nun die Bezeichnung „Ursache“ ihrer Etymologie nach betrachten, so finden wir, dafs mit der Vorsatzsilbe „ur“ Etwas hinter den Erscheinungen Verborgenes bezeichnet wird. „Sache“ ist die Bezeichnung für ein dauernd bleibendes Ding, für etwas Bestehendes. Das Wort „Ursache“ würde also seiner Etymologie nach, die hier genau mit dem Wortsinne übereinstimmt, das Bestehende bezeichnen, was hinter den Veränderungen, die wir wahrnehmen, verborgen ist, also den verborgenen dauernd bestehend bleibenden Grund der Erscheinungen. Das stimmt aber mit dem, was wir über den Begriff der Kraft dargelegt

haben, völlig überein; denn wir sehen, dafs die Kraft nur deshalb von uns als etwas dauernd Bestehendes aufgefafst werden kann, weil sie in jedem Augenblicke bereit ist, wirkungskräftig einzugreifen.

In dem Begriffe des Gesetzes der Erscheinungen liegt schon alles, was wir in diesen weiteren Benennungen hinzufügen. Durch diese wird nur der Begriff der Dauer und der stetigen Wirkungsbereitschaft mehr hervorgehoben. Wenn wir das Causalitätsverhältnifs für alle Veränderungen in der Natur als nothwendig betrachten, d. h. also annehmen, dafs jede Veränderung in der Natur ihre zureichende Ursache haben mufs, so können wir dieses auf Grund unserer ebengemachten Darlegungen auch anders ausdrücken, indem wir sagen: Alle Veränderungen in der Natur müssen gesetzlich vorgehen. Da wir die Naturerscheinungen nur dann begreifen, wenn sie in allen ihren Theilen gesetzlich und nur gesetzlich vorgehen, so können wir den Satz von der Causalität auch in der Form: „Alle Naturerscheinungen müssen begreiflich sein“ formuliren. Sobald die Gesetzlichkeit der Naturerscheinungen gegeben ist, dann haben wir auch damit gesagt, dafs das Gesetz fortbesteht, wirkungsbereit in jedem Augenblick, und wir sind berechtigt ein solches Gesetz in dem Sinne der angegebenen Worte als Ursache für die Erscheinungen zu bezeichnen. Der Causalitätssatz ist ein Satz, den wir eigentlich aus der Erfahrung nicht beweisen können. Denn wenn wir nicht das Causalitätsgesetz schon haben, so können wir aus keiner vor sich gehenden Erscheinung schliefsen, dafs sie von einer bestimmten Ursache ausgehen müsse. Wir müssen das Causalitätsgesetz schon anwenden, um zuerst zur Vorstellung der Kraft und der Ursache zu kommen. Es ist daher der Causalitätssatz in der That ein von formalen Bestimmungen unseres Denkvermögens abhängiger Satz a priori, denn wir könnten, wie gesagt, nicht zu der Vorstellung irgend einer Ursache oder zur Anerkennung einer Ursache kommen, wenn wir nicht an die Natur mit der Vorstellung herantreten, dafs es immer möglich sein mufs, Ursachen zu finden. Wenn wir nun anfangen nach Ursachen zu suchen, so finden wir zwar ein gutes Theil von Erscheinungen, in denen wir wirklich die Ursachen bezeichnen und bei denen wir die vollständige und strenge Gesetzmäfsigkeit nachweisen können; doch mufs andererseits auch hervorgehoben werden, dafs unsere Kenntnifs der Naturerscheinungen noch lange nicht so weit ist, um als empirischen Satz zu folgern: „Alle Naturerscheinungen sind begreiflich.“ Wir müssen uns stets erinnern, dafs wir bei grofsen Klassen von Naturerscheinungen, wie vor allem

bei den Erscheinungen des organischen Lebens in den Thieren und Pflanzen, bisher noch so weit von einer vollständigen Erkenntnifs ihrer Ursachen entfernt sind, dafs es ein sehr gewagter Schlufs sein würde, a posteriori aus der grofsen Reihe von bereits begreifbaren Naturerscheinungen auf die allgemeine Begreiflichkeit zu schliefsen. Bei anderen Gruppen, z. B. den meteorologischen Erscheinungen, welche jetzt zwar noch nicht völlig auf ihre Ursachen zurückgeführt sind, ist es freilich wahrscheinlich, dafs sie sich schliefslich werden begreifen lassen.

§ 7. Die Hypothese als Vorstufe des Gesetzes.

Unsere Aufgabe ist also, die Gesetze der Naturerscheinungen zu suchen. Wir haben dazu keinen anderen Weg, als dafs wir die Naturerscheinungen beobachten. In diesen kommen nun aber die Gesetze gewöhnlich nicht so ohne Weiteres zum Vorschein; sondern meistentheils sind die Umstände, unter denen die Veränderungen in der uns umgebenden Natur vor sich gehen, so aufserordentlich verwickelt, daß wir selbst bei Experimenten, die wir zu diesem Zwecke anstellen, nur sehr selten im Stande sind, das Gesetz in seiner einfachsten Wirkungsweise und für die unmittelbare Wahrnehmung offen vor uns liegend zu erkennen.

Gewöhnlich sind wir daher darauf angewiesen, versuchsweise Gesetze zu bilden und dann zu untersuchen, ob diese Gesetze in allen einzelnen Fällen, die wir durch künstliches Experimentiren herbei führen können, sich als richtig erweisen. Es ist das im Ganzen ein langsames und mühsames Suchen; denn die erste Aufstellung eines Gesetzes wird immer nothwendig den Charakter der Hypothese haben, sie kann nicht gleich absolute Sicherheit gewähren und bedarf einer Verification, die in den meisten Fällen ein sehr zeitraubendes Geschäft ist. Wenn also auch nothwendiger Weise der Weg der Untersuchung bei den Naturwissenschaften durch Hypothesen hindurchführt, so darf doch nie vergessen und verkannt werden, dafs diese Hypothesen nur dazu dienen sollen, die Anhaltspunkte für die spätere Formulirung des Gesetzes zu liefern. Bei der Aufstellung der Hypothesen ist es immer vortheilhaft, sie so zu bilden, daß sie für jeden einzelnen Fall, auf den wir sie anwenden wollen, ein ganz bestimmtes und eindeutiges Resultat geben. Es ist ein falscher Weg, wenn man glaubt, die ursprünglichen Hypothesen unbestimmt und allgemein halten zu können. Zur Aufstellung solcher Hypothesen gehört stets ein gewisser Erfindungs-

geist; es ist gleichsam ein Rathen, und es wird im Allgemeinen nur Derjenige zum Ziele kommen, welcher geschickt zu rathen weifs. Meistentheils geht das in der Weise vor sich, dafs der einzelne Beobachter, der in einem bestimmten Abschnitt der Physik eine Reihe von Einzelbeobachtungen macht, zunächst versucht, diese ihm bekannten Fälle unter ein bestimmtes Gesetz probeweise zusammenfassen, und dann überlegt, ob noch andere ihm bereits bekannte Fälle, wo er den Ablauf der Erscheinungen schon gesehen hat, existiren, die unter seine Definition fallen, d. h. in die Classe der Fälle, auf welche sich das von ihm probeweise formulirte Gesetz bezieht. Sodann aber werden sich meistens auch neue Fälle angeben lassen, die unter das Gesetz gehören sollten, und deren Erfolg noch nicht verificirt ist. Diese in ihrem Erfolge bisher noch unbekannten Fälle sind nun, soweit das möglich ist, thatsächlich durch das Experiment herbeizuführen, um zu ermitteln, ob sie nun auch unter das Gesetz passen. Dadurch wird aus der methodischen und principiell richtig fortschreitenden wissenschaftlichen Untersuchung das hypothetische Element um so mehr heraus geschafft, je weiter die betreffende Untersuchung ins Specielle durchgeführt werden kann. Das Wissenschaftliche an diesem Verfahren besteht darin, dafs wir uns möglichst vollständige Kenntnifs von der gegebenen Classe der Naturerscheinungen zu verschaffen suchen, theils, indem wir unmittelbar beobachten, was sich von selbst unserer Erfahrung darbietet, theils, indem wir absichtlich noch nicht beobachtete Fälle herbeizuführen suchen namentlich solche, die zwar unzweifelhaft in den Bereich des Gesetzes hineingehören, die aber doch in irgend einer wesentlichen Beziehung von den bisher beobachteten uns bekannten Fällen abweichen.

§ 8. Die Vollständigkeit der wissenschaftlichen Erfahrungen und ihre praktische Bedeutung.

Das eben geschilderte Verfahren, eine blos probeweise aufgestellte Hypothese als ein allgemein giltiges Gesetz nachzuweisen, geht im Wesentlichen darauf hinaus, möglichst vollständige Kenntnifs aller einzelnen Fälle zu suchen. Dadurch, dafs wir ein Gesetz für sie aufstellen, haben wir nun noch den weiteren Vorteil, dafs wir eine bestimmte Controle bekommen, theils über die Vollständigkeit in der Uebersicht der Fälle, theils auch dafür, dafs uns kein gegentheiliger Fall der unserem Gesetze widerspricht, gleichsam durchschlüpft; denn je mehr wir aufmerksam geworden sind auf das Gesetz, und

je mehr wir daran gewöhnt sind, das Gesetz in allen Fällen bestätigt zu sehen, desto auffälliger wird uns auch jeder Fall, der der dem Gesetze widerspricht. Wenn wir es mit regellosen Fällen zu thun hätten, so würden wir leicht einen einzelnen widersprechenden Fall übersehen können; aber gerade dadurch, dafs wir alle uns vorkommenden Fälle mit dem Gesetz vergleichen, werden wir mit der Zeit den höchsten Grad der Sicherheit erhalten, dafs kein Fall existirt, der ihm widerspricht.

Die echte Wissenschaft, nach richtiger Methode durchgeführt, ist in der Kenntnifs der einzelnen vorkommenden Fälle und ihres Ausgangs aufserordentlich viel besser unterrichtet, als irgend ein dilettantisches Wissen es sein kann, das durch Zufall sich in der Erfahrung eines einzelnen Menschen zusammengehäuft hat. Man hört sehr oft Aeufserungen, die ganz abstruse Behauptungen über das enthalten, was die Wissenschaft über irgend einen gegebenen Fall aussage. Namentlich sind in der Socialpolitik und Moralwissenschaft solche falschen und unsinnigen Angaben über das, was die Wissenschaft angeblich behaupte und lehre, sehr häufig. Der verborgene, nur selten klar erkannte Grund zu solchen Irrthümern liegt in der Regel in der Verwechslung von versuchsweise aufgestellten Hypothesen mit festerprobten Gesetzen. Man hat vielfach die Vorstellung, dafs die Wissenschaft nur ungegründete Hypothesen aufstelle und sich durch diese Hypothesen irre leiten liefse. Nach dem, was wir aber soeben von der echten wissenschaftlichen Methode gesehen haben, ist die echte Wissenschaft nichts anderes, als eine methodisch und absichtlich vervollständigte und gesäuberte Erfahrung, und zwar eine Erfahrung, welche viel vollständiger und viel sicherer ist, als jede durch Zufall zusammengekommene Erfahrung eines einzelnen nicht methodisch verfahrenden Menschen. Eben deshalb dürfen wir auf die echte Wissenschaft am meisten vertrauen und am meisten Wert legen.

Bei der Lösung unserer Aufgabe, die Gesetze für die einzelnen Naturerscheinungen zu suchen, müssen wir danach streben, möglichst allgemeine Gesetze zu finden, d. h. Gesetze, unter welche sich möglichst viele einzelne Fälle begreifen lassen. Je mehr uns das gelingt, desto weiter reicht unsere Kenntnifs im Einzelnen. Wenn wir das Gesetz einer Classe von Erscheinungen kennen, so wissen wir auch im Voraus anzugeben, was der Erfolg sein wird, wenn diese oder jene Bedingungen eintreten, und in vielen Fällen werden wir die Bedingungen sogar so wählen können, dafs der von uns gewünschte Erfolg eintritt. Die richtige Kenntnifs der Gesetze hat

also nicht blos einen theoretischen Werth für die menschliche Einsicht und die Erkenntniſs des Zusammenhanges des Ganzen, sondern sie hat auch einen ungeheuren praktischen Werth. Unsere ganze Herrschaft über die Natur und die Naturkräfte, wie sie sich namentlich in dem letzten Jahrhundert entwickelt, folgt aus dieser Kenntniſs der Gesetze.

Sowie wir die Kenntniſs der Gesetze besitzen, können wir zwei wichtige Dinge leisten, wir können erstens vorher wissen, was unter gegebenen Umständen geschehen wird, und das ist bekanntlich die einzig richtige Gabe der Prophezeiung, die dem Menschen gegeben ist. Jede Prophezeiung, die sich auf vollständige Kenntniſs der Gesetze und der Umstände stützen kann, unter denen die Gesetze im gegebenen Falle wirken können, ist zuverlässig und sagt uns wirklich voraus, was nun geschehen wird. Zweitens sind wir — und das ist noch wichtiger — mittelst einer solchen vorgängigen Kenntniſs der Gesetze in der Lage, die Naturkräfte nach unserem Willen und unseren Wünschen für uns arbeiten zu lassen. Die ganze Entwicklung der Industrie in der Neuzeit, und die ganze damit verbundene Aenderung in der Form des menschlichen Lebens und der menschlichen Thätigkeit, hängt wesentlich von dieser unserer Herrschaft über die Naturkräfte ab.

Zweiter Abschnitt.

Die Grundlagen der mathematischen Darstellung.

§ 9. Die Darstellung der Erscheinungen in Integralen und Differentialgleichungen.

Wenn wir uns eine Uebersicht über die Einzelfälle zu verschaffen suchen, welche in einem solchen allgemeinen Gesetz einbegriffen werden können, so finden wir, dafs eine Menge Verschiedenheiten des Erfolges dadurch zu Stande kommen, dafs die verschiedenen Naturkörper neben den wesentlichen Eigenschaften, die wir nicht abändern können, sehr verschiedene Form und Gröfse haben. Diese aber können wir in einer aufserordentlich grofsen Zahl von Fällen nach unserer Willkür abändern, und somit dürfen wir Form und Gröfse der Körper, die wir unseren Versuchen unterwerfen, meistentheils als relativ leicht veränderliche Variable betrachten. Es wird dann unsere Aufgabe werden, uns in der Ausdrucksweise für die Naturgesetze von den Zufälligkeiten zu befreien, welche durch die Form und Gröfse bedingt sind. Aufserdem müssen wir aber auch noch unabhängig zu werden suchen von der Lage im Raum und der Dauer in der Zeit. Je mehr uns das gelingt, in desto weiterem Umfange werden unsere Gesetze gültig sein können. Um von der Form unabhängig zu werden, müssen wir uns bestreben, Ausdrücke zu gewinnen, in denen die Form, in welcher die Körper auftreten, nicht mehr vorkommt, die also gegeben sind durch die ganz allgemeinen Raumverhältnisse, ohne dafs wir auf eine bestimmte Form Rücksicht zu nehmen brauchen. Es sind nun bisher zwei Wege beschrieben worden, um sich von der Bezugnahme auf eine bestimmte Form frei zu machen. Jeder Naturkörper kann im Allgemeinen als ein Aggregat kleinster Theilchen angesehen werden, welche man sich nun entweder als Punkte, sogenannte materielle Punkte, d. h. Partikelchen von Massen, die so klein sind, dafs wir keine Ausdehnungen an ihnen und auch keine Richtungen in ihnen zu unterscheiden

brauchen, oder als körperliche Volumenelemente vorstellt, d. h. als Volumenelemente des Raumes, die mit Materie gefüllt sind. An einem punktförmigen Raumgebilde sind keine Seitenrichtungen zu definiren, denn durch einen Punkt kann man unterschiedslos nach allen Richtungen gerade Linien ziehen, während man sich bei körperlichen Raumelementen noch ein Coordinatensystem in das betreffende Volumen eingelagert denken kann, und wir somit in dem Volumen bestimmte feste Richtungen unterscheiden können, die möglicher Weise verschiedene physikalische Eigenschaften haben.

In einer grofsen, vielleicht unbegrenzten Zahl von Fällen können wir nun die Wirkungen, welche durch ausgedehnte Körper hervorgebracht werden, als die Summe derjenigen Wirkungen betrachten, die von den einzelnen materiellen Punkten in dem mit Materie gefüllten Raume hervorgebracht werden, d. h. wir können die von den Körpern ausgehenden Kräfte auf solche Kräfte zurückführen, die von den einzelnen materiellen Punkten ausgehen und immer nur von der Lage je eines dieser Punkte abhängen. In anderen Fällen aber dürfen wir das nicht. Sondern, wenn wir es versuchen wollten, die Gesammtwirkungen in die Wirkungen von Punkten auf einander zu zerlegen, so würden wir mit unmittelbar benachbarten Punkten zu rechnen haben, die also beliebig kleine Entfernung von einander besitzen, und dafür fehlt uns bisher meistentheils noch die Kenntnifs der Gesetze, nach welchen solche nahe an einander liegenden Punkte auf einander wirken. Wenn wir auf getrennte materielle Punkte zurückgehen können, so ist unsere Betrachtungsweise einfacher, denn wir haben dann nur die Wirkungen von Punkten auf einander zu berücksichtigen, welche selbst in einer gewissen Entfernung von einander liegen.

Das sind die beiden Grenzformen, auf welche wir in unserer Analyse der räumlichen Zusammensetzungen der Wirkungen zurückzugehen pflegen. In dem Umstande, dafs wir die Wirkungen ausgedehnter Körper auf Wirkungen von Massentheilen zurückführen können, die sehr klein sind, oder die so weit von einander entfernt sind, dafs man ihre Durchmesser gegen ihre Entfernungen vernachlässigen kann, liegt der Grund, warum die theoretische Physik überwiegend mathematisch wird. Wir müssen dabei nämlich Additionen von den Wirkungen vornehmen, welche die einzelnen Punkte oder Massenelemente des einen Körpers auf die einzelnen Punkte oder Massenelemente des anderen Körpers ausüben. Diese Additionen erfordern in den meisten Fällen, dafs wir Summen bilden, deren einzelne verschwindend kleine Theile verschiedene Gröfse haben

und namentlich von der Entfernung der Punkte, die auf einander wirken, abhängig sind, so dafs wir Summen von einer Reihe von Elementen zu bilden haben, die sich mit der Lage der Theilchen ändern. Solch eine Summe wird rechnungsmäfsig immer als ein Integral darzustellen sein; oder wenn wir das Integral auflösen wollen, so werden wir Differenzirungen ausführen müssen. In den meisten Fällen wird die Folge davon sein, dafs das Gesetz die Form einer Differentialgleichung erhält, und dafs die Folgerung, welche wir aus dem Gesetze herleiten wollen, sich in der Form von Integralen dieser Differentialgleichung darstellen wird. Es giebt nur wenige Fälle, wo alle Elemente der zu bildenden Summe gleich sind; das ist z. B. der Fall, wo wir einen ausgedehnten schweren Körper auf eine Wage legen und der Wirkung der irdischen Schwere aussetzen, dann ist der Mittelpunkt der Schwerwirkung ungefähr im Mittelpunkt der Erde und er ist von allen den einzelnen Theilen der schweren Masse, die wir abwägen wollen, so weit entfernt, dafs wir die Unterschiede dieser Entfernungen vernachlässigen können. Wir können in diesem Falle alle Kräfte, mit denen die Erde auf die einzelnen Theile des Gewichtes einwirkt, als gleich grofs betrachten; und wenn wir eine Summe von lauter gleich grofsen Elementen zu bilden haben, so brauchen wir nicht zu integriren, sondern können sie durch Multiplication finden.

Ebenso wie die Verschiedenheit im Raum, kommt nun auch die Verschiedenheit in der Zeit in Betracht. Wenn die auf einander wirkenden Körper sich gegenseitig bewegen und allmählich ihre gegenseitige Lage ändern, so wird die Wirkung während dieser Zeit nach einem bestimmten Gesetz, das von der Bewegung abhängt, sich ändern, und wenn wir diese Wirkungen nun während einer gewissen Zeit zu addiren haben, so tritt uns die Aufgabe entgegen, eine continuirliche Reihe von veränderlichen Gröfsen zu summiren, was uns wieder auf den Procefs der Integrirung führt, während bei dem umgekehrten Verfahren die Differentiirung nothwendig wird.

Die meisten Aufgaben der mathematischen Physik können wir also nur dadurch lösen, dafs wir integriren oder differenziren, und nur in wenigen besonders einfachen Fällen, z. B. bei der Geschwindigkeit eines frei fallenden Körpers, sind die einzelnen zu summirenden Theile, das sind hier die Zunahmen der Fallgeschwindigkeit, welche die Schwere hervorbringt, fortdauernd von derselben Gröfse. In solchen einfachen Fällen ist die Aenderung in der Zeiteinheit einfach mit der Zeit zu multipliciren. Diese verhältnifsmäfsig wenig zahlreichen Fälle werden besonders in der „Experimentalphysik" vor-

getragen, da man hier die Methode, wie Gesetze gefunden und aus ihnen Folgerungen gezogen werden, an solchen Fällen demonstriren mufs, bei denen man nicht auf complicirtere und schwierigere Rechnungsarten geführt wird, und wo die sinnliche Erscheinung und deren Verständnifs möglichst wenig durch die Schwierigkeit der mathematischen Behandlung beeinträchtigt werden soll. Wenn man aber zu einer vollständigen und eindringenden Kenntnifs der Gesetze kommen will, muss man auch zu den verwickelteren Theilen der mathematischen Analyse seine Zuflucht nehmen, weil man sich nicht auf den einen oder den anderen Fall beschränken kann. Stets muss man dann die Phänomene ohne Auswahl beobachten und den Ausdruck der aus den Beobachtungen abgeleiteten Gesetze von den Complicationen zu befreien suchen, welche durch Ausdehnung und Bewegung der Körper hinein gebracht werden. Das ist in der Regel aber nicht möglich, ohne dafs man bereit ist, auch in die schwierigeren mathematischen Untersuchungen einzugehen. Ja, es ist klar, dafs man bei wirklich vollständiger Kenntnifs der Physik bereit sein müfste, die Gesetze an jeder noch so complicirten Combination von Naturkörpern und ihren Bewegungen zu prüfen. Es kann sich z. B. die Astronomie nicht die Fälle aussuchen, welche ihr erlauben, Integrationen und Differentiationen zu vermeiden, sondern sie mufs bereit sein, in allen durch die Umstände gegebenen, wenn auch noch so complicirten Fällen die Rechnung durchzuführen. Es mag hier noch bemerkt sein, dafs vielfältig von Seiten der reinen Mathematiker die mathematische Physik mit dem Zwecke betrieben wird und betrieben worden ist, interessante Beispiele für schwierige mathematische Probleme zu finden und zu behandeln; wie denn auch in der Entwickelungsgeschichte der Mathematik ein grofser Theil der mathematischen Disciplinen sich an den Beispielen ausbildete, welche zunächst die Physik dargeboten hat. Das ist hier nicht unser Zweck. Wir wollen hier eine möglichst klare und übersichtliche Einsicht von den physikalischen Gesetzen, d. h. von den Grundgesetzen der Natur und deren Anwendung für die einzelnen Classen der Naturkörper geben. Soviel wie möglich wollen wir uns dabei an einfache Beispiele halten. Wir wollen Physik treiben, keine Mathematik, und wollen uns den Weg so leicht machen, als es möglich ist; es wird aber trotzdem die Vollständigkeit der zu erlangenden Einsicht ein gewisses Eindringen in die gröfseren Tiefen der mathematischen Analysis erfordern.

§ 10. Der Begriff der Gleichheit.

In der ersten Definition des Naturgesetzes haben wir gesagt, wir wollen Classen von Fällen suchen, in denen eine gewisse Gleichheit der Vorgänge stattfindet. Da stoſsen wir zunächst auf den Begriff des Gleich, und es fragt sich, wo ist denn der Begriff des Gleich hergekommen und was bedeutet er? Wenn wir ihn auf einen gewissen Fall anwenden wollen, so müssen wir doch von vorn herein entscheiden können, ob er für diesen Fall paſst, und um darüber entscheiden zu können, werden wir eine Definition haben müssen. Wie ist die Definition zu geben? Sollen wir sagen, zwei Gröſsen sind einander gleich, wenn sie für einander gesetzt werden können? Dagegen ist einzuwenden, daſs man zwei Gröſsen niemals in allen Fällen für einander setzen kann. Man kann zwar z. B. zwei gleiche Gewichte für einander setzen. Wenn man das eine Gewicht von der Waage nimmt, und das andere statt dessen darauf legt, so wird die Waage sich ebenso einstellen, wie sie vorher eingestanden hat, und die zwei Gewichte können also für einander gesetzt werden, insofern es sich um Beobachtungen der Schwere von zwei Körpern handelt. Man kann, um ein anderes Beispiel zu nennen, zwei Körper am Thermometer vergleichen und finden, daſs die beiden Körper gleiche Temperatur haben, und daſs ein und dasselbe Thermometer in Berührung mit den beiden Körpern gleichen Stand annimmt. Dann kann man in Bezug auf die thermometrischen Angaben sagen, daſs die beiden Körper sich gegenseitig vertreten können. Man kann zwei Flächen in Bezug auf ihre Helligkeit vergleichen und finden, daſs bei gleicher Beleuchtung die beiden gleich hell erscheinen und keinen Unterschied im Gesichtsfelde erkennen lassen. Aber in allen diesen Fällen sind die als gleich erklärten Gröſsen nur in gewisser Beziehung einander gleich. Es gehört, um über die Gleichheit zu entscheiden, die Kenntniſs der Methode dazu, nach der die Vergleichung ausgeführt werden soll. Es können zwei Gewichte gleich schwer sein, sie können aber sehr verschiedene Temperatur und können sehr verschiedene Helligkeit haben; die Gleichheit der einen Beziehung läſst nicht auf Gleichheit der andern Beziehungen schlieſsen, und es wird immer noch nöthig sein, daſs wir eine weitere Bestimmung darüber hinzufügen, in welcher Weise die beiden Körper verglichen werden sollen. Zugleich bemerken wir, daſs die Ungleichheit der allgemeinere Fall ist und die Gleichheit einen besonderen Ausnahmsfall bildet. Wir werden bei der Vergleichung zweier Körper in der Regel die Schwere oder die Temperatur oder

die Helligkeit ungleich finden; aber es wird möglich sein, die Eigenschaften des einen Körpers so zu ändern, daſs Gleichheit eintritt.

Nun ergiebt sich aber noch eine nähere Bestimmung des Begriffs der Gleichheit, welche wir eigentlich als zur Definition gehörig bezeichnen können, eine Bestimmung, die sich ausdrückt in dem gewöhnlich als erstes Axiom der Arithmetik angegebenen Satze: Wenn zwei Gröſsen einer dritten gleich sind, so sind sie unter sich gleich. In dieser allgemeinen unbestimmten Fassung ist der Satz offenbar nicht richtig, sondern es kann eine Gröſse z. B. in ihrem Gewicht einer zweiten gleich sein, und eine dritte kann der zweiten in Bezug auf die Farbe gleich sein. Das würde keinerlei Gleichheit zwischen der ersten und dritten bestimmen. Aber der Satz ist richtig und von groſser Wichtigkeit, wenn wir ihn auf solche Gröſsen anwenden, die nach derselben Beobachtungsmethode verglichen werden. Solche Gröſsen wollen wir in Bezug auf die Beobachtungsmethode als gleichartig bezeichnen. Hier können wir dieses arithmetische Axiom eigentlich als die Definition einer Gleichheit betrachten. Es muſs das Axiom erfüllt sein für die Fälle, wo wir zwei Paare von Gröſsen unter einander als gleich anerkennen sollen. Um das zu erläutern, wollen wir z. B. annehmen, wir würden zwei Gewichte dadurch vergleichen, daſs wir sie auf die beiden Schalen einer Waage legen und würden sie für gleich erklären, wenn die Waage einspielt. Man sieht sogleich, daſs diese Definition der Gleichheit nur dann dem arithmetischen Axiom entspricht, wenn die Waage genau gleicharmig ist. Denn an einer ungleicharmigen Waage würde an dem längeren Arm das Gewicht a etwas kleiner sein müssen, als das Gewicht b an dem kürzeren Arm, wenn die beiden sich im Gleichgewicht halten sollen. Würde nun ein drittes Gewicht c in derselben Weise mit b verglichen wie b mit a, so käme b an den längeren Arm und c auf den kürzeren. Spielt jetzt wieder die Waage ein, so würde sie nicht mehr einspielen können, wenn c in derselben Weise mit a verglichen wird, wie b mit a verglichen wurde. Diese Definition der Gleichheit durch das Einspielen einer ungleicharmigen Waage wäre nicht zulässig, weil sie dem Axiom widerspricht, daſs zwei Gröſsen, die einer dritten gleich sind, auch unter einander gleich sind. In ähnlicher Weise könnte es zunächst als zweifelhaft erscheinen, ob man in Bezug auf die Temperaturen die Definition der Gleichheit so geben darf, wie es oben geschah, weil die Art wie wir einen Körper erwärmen, sehr verschieden sein kann. Werden zwei Körper in Bezug auf die Temperatur gleich genannt,

die so in Berührung gebracht sind, dafs die Wärme von dem wärmeren zum kälteren übergehen kann, so ist von vorn herein noch nicht gewifs, ob diese Definition zulässig ist. Erst durch den Versuch überzeugen wir uns, dafs ein dritter Körper, z. B. ein Thermometer, das mit dem ersten Körper gleiche Temperatur hat, auch mit dem zweiten in der Temperatur übereinstimmt. Aber wir würden nicht berechtigt sein, ehe wir entsprechende Experimente gemacht haben, zu schliefsen, dafs die Art der Erwärmung, also z. B. durch einen chemischen Prozefs oder durch die Sonne oder durch Reibung für die thermometrische Wirkung nicht in Betracht kommt, dafs also die thermometrische Wirkung unabhängig ist von der Art der Wärme, die wir angewendet haben. Wir müssen anerkennen, dafs das ein empirischer Satz ist, und in der That ist er ja im Wesentlichen nichts Anderes, als der zweite Hauptsatz der mechanischen Wärmelehre, aus dem eine Menge anderer Sätze hergeleitet werden. Zur Definition der Gleichheit gehört also der Satz, dafs zwei Gröfsen, die einer dritten gleich sind, auch unter einander gleich sind. Nur solche Untersuchungsmethoden dürfen zur Definition der Gleichheit verwendet werden, für die das arithmetische Axiom erfüllt ist. Ob es erfüllt ist, wird durch das Experiment entschieden.

§ 11. Vergleichung ungleichartiger Körper.

In der Natur haben wir es selten mit Fällen zu thun, wo eine gröfsere Anzahl von Naturkörpern vollständig gleich sind. Auch selbst wenn sie gleichartig sind, so stehen sie nicht immer in einem solchen Verhältnisse zu einander, dafs man sie gleich setzen kann, sondern wir haben meistentheils mit Fällen zu thun, wo in Bezug auf die zu vergleichende Eigenschaft die einzelnen Naturkörper gewifse Gröfsenverschiedenheiten zeigen. Den Begriff der Gleichartigkeit hatten wir oben so definirt, dafs als gleichartig solche Körper zu betrachten sind, welche nach derselben Methode unter einander verglichen werden dürfen. Aber gleichartige Körper können noch immer in der Gröfse gleich oder ungleich sein. Wir kommen dadurch zu der Aufgabe, ungleich grofse, aber gleichartige Körper mit mit einander zu vergleichen. Ist es möglich, eine Methode der Vergleichung so auszuführen, dafs man den einen Körper einem Aggregat zweier oder mehrerer Körper gleich setzt? Zu dem Ende müssen wir untersuchen, nach welchen Gesetzen sich zwei Körper in Bezug auf eine Eigenschaft oder eine Wirkung zusammensetzen oder,

wie GRASSMANN sagt, mit einander verknüpfen lassen. Unter Verknüpfung versteht GRASSMANN irgend eine Art der Verbindung, sei es begrifflicher Verbindung, wie sie beim Zählen vorkommt, oder natürlicher Verbindung, wie sie bei allerlei Arten von Zusammenwirken verschiedener Körper vorkommen kann, wobei es z. B. auf die Gröfse oder auf das Gewicht oder auf die Raumdimensionen oder auf mannigfaltige andere Arten des Zusammenwirkens ankommen kann. Man kann sagen, dafs der gröfste Teil der Aufgaben, mit denen wir uns in der mathematischen Physik zu beschäftigen haben, mit Arten der Zusammenfassung oder der Verknüpfung zu thun hat, bei welcher das Resultat wie das Resultat einer Addition durch eine Summe dargestellt wird. Wir können uns aber nicht auf die Art der Addition beschränken, wie sie etwa einfach dadurch gegeben wird, dafs wir zwei Haufen von Körpern zusammenthun und durchzählen, sondern es kommen viele verschiedene Arten der Verknüpfung vor, die sachlich von der Zahlenaddition verschieden, aber durch dieselben Gesetze geregelt werden. Man denke z. B. an die Zusammensetzung gerader Linien in Bezug auf ihre Länge, oder an die Zusammensetzung von Dreiecken in Bezug auf ihre Fläche.

Wir setzen zwei gerade Linien in einer bestimmten Weise zu einer dritten geraden zusammen, von der wir sagen, dafs sie der Länge nach der Summe jener beiden gleich sei; und ebenso können wir in einer bestimmten Weise zwei Dreiecke zu einem dritten Dreieck zusammensetzen, von dem wir sagen, dafs es der Fläche nach der Summe jener beiden gleich sei. Und zahlreiche ähnliche Beispiele finden sich in der theoretischen Physik, wo eine gewisse Zusammensetzung der Gröfsen Addition genannt wird, weil dieselben Gesetze erfüllt sind, die bei der Addition ganzer Zahlen gefunden und für den Begriff der Addition als wesentlich erkannt werden.

Welches sind nun diese für den Begriff der Addition wesentlichen Gesetze? Sie ergeben sich am einfachsten aus dem Begriff des Zählens.

§ 12. Der Begriff des Zählens und die Gesetze der Addition.

Wenn wir die Anzahl eines Haufens von Gegenständen zu bestimmen haben, so ist dazu nur vorauszusetzen, dafs die Gegenstände weder eine Theilung erleiden noch mit einander verschmelzen; sondern dafs jeder Gegenstand eine abgesonderte Existenz besitzt und während des Zählens behält.

Es kann sich dabei um irgend welche Objecte handeln, die

unsere Aufmerksamkeit auf sich ziehen, nur dafs wir sie von einander müssen sondern können. Es können greifbare Dinge sein wie Münzen, Klötze, Eier, oder nicht greifbare wie Worte oder Töne oder Lichter, vorausgesetzt nur immer, dafs jedes einzelne von diesen Objecten nicht mit den andern verschmelzbar ist und eine abgesonderte Existenz besitzt und diese während des Zählens behält. Die Anzahl der Objecte bestimmen wir in der Weise, dafs wir eins nach dem andern absondern und von der Zahl eins angefangen jedes-Mal die nächste ganze Zahl nennen nach ihrer Reihenfolge. Die letzte Zahl, zu der wir auf diese Weise kommen, heifst die Anzahl der gezählten Objecte. Die Zahlen sind im Wesentlichen nichts anderes, als gewisse hörbare oder sichtbare oder fühlbare Zeichen, welche weiter keine wesentlichen Eigenschaften haben, als dafs sie immer in einer bestimmten Ordnung wiederkehren sollen und jede einzelne von allen anderen unterscheidbar sein soll. Dafs auf die Art dieser Zeichen gar nichts ankommt, das zeigt sich daran, dafs in den verschiedenen menschlichen Sprachen ganz verschiedene Zeichen für die Zahlen gewählt worden sind. Für jedes Zeichen ist also wesentlich zu wissen, wie das folgende Zeichen lautet oder aussieht oder sich anfühlt. Wenn wir das wissen und wenn wir das erste Zeichen kennen, so können wir zählen.

So ist z. B. das Zählen ermöglicht, wenn wir festsetzen, das erste Zeichen sei das Zeichen 1, das folgende das Zeichen 2, das folgende 3 u. s. f., gleichgültig ob wir nun gerade diese oder irgend welche andere unterscheidbare Zeichen wählen. Die Festsetzung, dafs z. B. das Zeichen 4 auf das Zeichen 3 folgt, wollen wir in der Gleichung ausdrücken:

$$3 + 1 = 4.$$

Das Zeichen $+ 1$ zu 3 gefügt, soll also nur heifsen, dafs das folgende Zeichen genommen werden soll.

Die Möglichkeit des Zählens besteht in der Fähigkeit unseres Gedächtnisses, eine solche Reihenfolge von willkürlich gewählten Zeichen zu behalten und zu jeder Zeit in derselben Ordnung wieder zu produciren. Die Art der Zeichen ist dabei vollkommen gleichgültig.

Was nun den Begriff der Addition betrifft, so betrachten wir zwei Gruppen von Objecten, die wir zu einer Gruppe zusammenfügen. Wir addiren die Anzahlen der beiden Gruppen, indem wir die Anzahl der Objecte in der Gesammtgruppe feststellen. Das geschieht dadurch, dafs wir die beiden Gruppen hinter einander abzählen.

Nachdem wir mit der einen Gruppe fertig geworden sind, zählen wir weiter in der Reihenfolge der natürlichen Zahlen, indem wir die Körper der andern Gruppe allmählich zu dem Haufen gezählter Körper hinzufügen.

Besteht z. B. die erste Gruppe aus 3 Objecten und die zweite nur aus einem Object, so ist die Addition durch die Gleichung $3 + 1 = 4$ ausgedrückt, durch dieselbe Gleichung, welche die Beziehung der beiden auf einander folgenden Zeichen definirt. Besteht dagegen die zweite z. B. aus 4 Objecten, so zählen wir von 3 aus 4 Schritte weiter, d. h. wir zählen die Zahlzeichen, die auf 3 folgen, und bleiben bei dem vierten stehen. Dies Zeichen ist 7, und das Resultat drücken wir durch die Gleichung aus $3 + 4 = 7$.

Um dieses Verfahren auszuführen, brauchen wir aber keine Gruppen von körperlichen Gegenständen zu haben, sondern wir können das auch an rein imaginirten Vorstellungen machen, an unseren Zahlzeichen. Wir beginnen mit derjenigen Zahl, welche der letzten Zahl der ersten Gruppe folgt, und zählen die Zahlzeichen von hier ab durch, bis wir die der zweiten Gruppe entsprechende Anzahl abgezählt haben. Das letzte Zahlzeichen entspricht der Summe der beiden Zahlen. Sei nun a das Zahlzeichen der ersten Gruppe, b das Zahlzeichen der zweiten und s das Zahlzeichen der Gesammtgruppe, so schreiben wir

$$a + b = s,$$

um diesen Procefs zu bezeichnen, nach dem s gefunden wird. Für den speciellen Fall, wo $b = 1$ ist, geht s in die auf a folgende Zahl über.

Wenn nun in der zweiten Gruppe die Anzahl um eins gröfser wäre, so würde $b + 1$ an die Stelle von b treten. Dann würden wir auch beim Abzählen der Zahlzeichen, die auf a folgen, um eine Stelle weiter kommen. An die Stelle von s müfste also $s + 1$ treten. Damit erhalten wir das Gesetz:

$$a + (b + 1) = s + 1$$

oder anders geschrieben:

$$a + (b + 1) = (a + b) + 1.$$

Die Klammer bedeutet dabei, dafs die Zahl gemeint ist, die sich als Resultat der in der Klammer bezeichneten Operation ergiebt. Wir können sagen, dies Gesetz enthalte die Definition der Addition,

in so fern es lehrt, die Summe von a und $b + 1$ zu finden, wenn man die Summe von a und b schon kennt. Da die Summe $a + 1$ durch die Definition des Zählens gegeben ist, so ist mithin durch das Gesetz

$$a + (b + 1) = (a + b) + 1$$

die Addition vollständig definirt.

Aus diesem Gesetz folgt sogleich das Allgemeinere:

$$a + (b + c) = (a + b) + c.$$

Für $c = 1$ geht es in das vorige Gesetz über. Nun läfst sich zeigen, dafs, wenn für irgend einen Werth von c das Gesetz erfüllt ist, es auch erfüllt bleibt, wenn $c + 1$ an die Stelle von c tritt. Damit ist es dann allgemein bewiesen. Wir fügen zu beiden Seiten der Gleichung 1 hinzu. Dann müssen die beiden sich so ergebenden Zahlen ebenfalls einander gleich sein:

$$[a + (b + c)] + 1 = [(a + b) + c] + 1.$$

Nach der Definition der Addition aber, werden wir diese Summe auch so bilden können, dafs wir die 1 nicht zu der ganzen Summe hinzu addiren, sondern zum zweiten Summanden. Damit erhalten wir:

$$a + \big((b + c) + 1\big) = (a + b) + (c + 1)$$

und da ferner nach der Definition der Addition $(b + c) + 1 = b + (c + 1)$ ist, so wird:

$$a + \big(b + (c + 1)\big) = (a + b) + (c + 1),$$

was sich nur dadurch von der Gleichung

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

unterscheidet, dafs $c + 1$ an die Stelle von c getreten ist. Da die Gleichung für $c = 1$ richtig ist, so mufs sie daher auch für jeden Werth von c richtig sein.

Aufser dem Gesetz

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

ist noch ein anderes für die Addition wesentlich:

$$a + b = b + a.$$

Wir beweisen zunächst den einfacheren Fall:

$$a + 1 = 1 + a.$$

In dem Falle, wo $a = 1$ ist, fällt der Unterschied der beiden Seiten der Gleichung weg und wir erhalten die Identität $1 + 1 = 1 + 1$. Wir beweisen nun, dafs, wenn diese Gleichung für einen bestimmten Werth von a richtig ist, sie auch für $a + 1$ richtig sein mufs. Aus

$$a + 1 = 1 + a$$

folgt durch Hinzufügung von 1 auf beiden Seiten:

$$(a + 1) + 1 = (1 + a) + 1.$$

Nach dem ersten Gesetz der Addition ist aber:

$$(1 + a) + 1 = 1 + (a + 1).$$

Folglich ergiebt sich:

$$(a + 1) + 1 = 1 + (a + 1).$$

Mit andern Worten, wenn für irgend einen Werth von a die Gleichung $a + 1 = 1 + a$ richtig ist, so ist sie auch für den folgenden Werth und damit für alle folgenden richtig. Nun ist die Gleichung für $a = 1$ eine Identität; mithin ist sie für alle Werthe von a richtig.

Nun steigen wir von der Gleichung

$$a + 1 = 1 + a$$

zu dem allgemeineren Gesetz:

$$a + b = b + a$$

auf, indem wir auch hier den Schlufs von b auf $b + 1$ machen. Ist für irgend einen Werth von b die Gleichung $a + b = b + a$ erfüllt, so fügen wir auf beiden Seiten 1 hinzu und erhalten:

$$(a + b) + 1 = (b + a) + 1.$$

Auf der linken Seite finden wir nach dem Gesetz, dafs die Addition definirt $(a + b) + 1 = a + (b + 1)$, auf der rechten Seite $(b + a) + 1 = b + (a + 1)$.

Damit geht unsere Gleichung über in

$$a + (b + 1) = b + (a + 1).$$

Nun haben wir aber eben gesehen, dafs in der Summe $a + 1$ die Summanden vertauscht werden können. Wir können also auch setzen:

$$a + (b + 1) = b + (1 + a).$$

Indem wir nun wieder nach dem Definitionsgesetz auf der rechten Seite das mittlere Glied zum ersten addiren, erhalten wir

$$a + (b + 1) = (b + 1) + a.$$

Wenn also die Gleichung $a + b = b + a$ für eine Zahl b gilt, so gilt sie auch für die nächst höhere Zahl $b + 1$, welches auch a sein mag. Da nun für $b = 1$ und beliebige Werthe von a ihre Richtigkeit bewiesen ist, so gilt sie damit auch für beliebige Werthe von b.

Damit sind die beiden Gesetze der Addition

1. $$(a + b) + c = a + (b + c)$$

2. $$a + b = b + a$$

aus dem Definitionsgesetz der Addition

$$(a + b) + 1 = a + (b + 1)$$

hergeleitet.

Aus dem ersten Gesetz können wir auch folgern, dafs bei einer Summe beliebig vieler Summanden irgend eine Gruppe auf einander folgender Summanden für sich zu einer Summe zusammengefafst werden kann, ohne das Resultat zu ändern.

Aus den beiden Gesetzen 1 und 2 folgt ferner, dafs bei einer Summe von beliebig vielen Summanden die Reihenfolge gleichgiltig ist. Denn nach dem ersten Gesetz können wir irgend zwei auf einander folgende Summanden zusammenfassen, ohne das Resultat zu verändern und nach dem zweiten Gesetz können wir sie dann vertauschen. Durch Vertauschung eines Summanden mit dem benachbarten kann man aber jeden Summanden an jede beliebige Stelle bringen und damit die Reihenfolge der Summanden beliebig ändern.

Die Gesetze 1 und 2 sind specielle Fälle dieser beiden allgemeineren Gesetze.

Bei irgend einem Process der Verknüpfung oder des Zusammenwirkens von Gröfsen werden wir sagen: Die Axiome der Addition sind erfüllt, wenn das Resultat des Zusammenwirkens unabhängig

ist, erstens, von der Ordnung, in welcher die Verknüpfungen der einzelnen Paare von Gröfsen mit einander vor sich gehen, d. h. wie diese gruppenweise zusammengefafst werden, und zweitens von der Reihenfolge, in der diese Verknüpfungen erfolgen.

Denken wir z. B. daran, dafs wir Gewichtsstücke auf die beiden Waagschaalen einer gleicharmigen Waage legen. Wir finden, dafs es beim Einspielen der Waage ganz einerlei ist, in welcher Reihenfolge wir die Stücke auflegen, ob z. B. die grofsen Stücke zuerst und nachher die kleinen oder umgekehrt. Und zweitens finden wir, dafs es einerlei ist, ob wir eine Gruppe von Gewichtsstücken durch ein ihnen gleiches ersetzen. Wir zeigen auf diese Weise durch das Experiment, dafs das entstehende Gleichgewicht unabhängig ist sowohl von der Art, wie wir die einzelnen Gewichte verknüpfen und etwa gruppenweise durch ein gröfseres ersetzen, als auch von der Reihenfolge, wie wir sie auflegen. Wir zeigen mithin durch das Experiment, dafs, wenn mehrere Gewichtsstücke gleichzeitig auf die Waagschaale gebracht werden, die wesentlichen Merkmale der Addition erfüllt sind.

Setzen wir gerade Linien dadurch zusammen, dafs wir Ende an Ende legen und die Entfernung der beiden freien Enden als Resultat der Verknüpfung ansehen. Die Entfernung ist nicht eindeutig bestimmt, so lange wir die Richtung beliebig lassen. Wir machen daher die weitere Festsetzung, dafs die beiden Linien in dieselbe Gerade gebracht werden sollen. Dann bleiben nur zwei Möglichkeiten. Entweder liegen die freien Enden auf verschiedenen Seiten, oder sie liegen auf der gleichen Seite der zusammengelegten Enden. Im ersten Falle ist die Entfernung der äufseren Punkte ein Maximum, im zweiten ein Minimum. Wir können die Definition auch so machen: Es sollen die beiden freien Enden festgehalten werden. Dann sollen die Linien so zusammen gelegt sein, dafs der mittlere Punkt, indem die anderen Enden zusammenstofsen, keine Bewegung mehr machen. Es bleiben dann auch nur die beiden oben erwähnten Arten der Zusammensetzung möglich. Sind nun für diese beiden Arten die Gesetze der Addition erfüllt? Das Gesetz $a + b = b + a$ ist für beide Arten erfüllt; denn die Entfernung der beiden freien Enden bleibt bei der Vertauschung der beiden Linien die gleiche. Aber das Gesetz $(a + b) + c = a + (b + c)$ ist nur für die eine Art der Zusammensetzung erfüllt, wenn die zusammengelegten Enden zwischen den freien Enden liegen. Daher kann von den beiden Arten nur diese Art der Zusammensetzung als Addition aufgefafst werden.

Wir können farbige Lichter zusammensetzen, z. B. indem wir dieselbe Fläche gleichzeitig beleuchten. Durch das Experiment läfst sich feststellen, dafs die Gesetze der Addition dabei erfüllt sind. Wir nennen die Lichter gleich, wenn sie die gleiche Helligkeit und Farbe haben und überzeugen uns durch das Experiment, dafs sie bei der Zusammensetzung gruppenweise durch ein ihnen gleiches Licht ersetzt werden können, und daß die Reihenfolge der Zusammensetzung beliebig geändert werden kann, ohne das resultirende Licht in Farbe und Helligkeit zu ändern. Man ist daher berechtigt zu sagen, dafs die Lichter addirt werden. Ebenso kann man die Widerstände von Leitungsdrähten für elektrische Ströme addiren, indem man die Leitungsdrähte der Länge nach an einander fügt und den Strom durch die ganze Länge hindurch gehen läßt. Andrerseits können wir auch die Leitungsfähigkeit der Drähte addiren, indem wir sie nämlich parallel mit einander zu einem dickeren Leiter verbinden. Die resultirende Leitungsfähigkeit sind wir berechtigt, die Summe der Leitungsfähigkeiten der einzelnen Drähte zu nennen. Dies Beispiel ist insofern lehrreich, als die Art, wie Widerstände oder Leitungsfähigkeiten verglichen werden, dieselbe ist, weil diese beide Gröfsen Funktionen von einander sind. Die Leitungsfähigkeit ist der reciproke Wert des Widerstandes. Die Methode der Vergleichung giebt keine Entscheidung darüber, welche von zwei ungleichen Gröfsen die gröfsere ist. Denn Widerstand und Leitfähigkeit z. B. bewegen sich ja entgegengesetzt. Der gröferen Leitfähigkeit entspricht der kleinere Widerstand. Erst die Methode der Addition bestimmt auch den Begriff des Kleiner und Gröfser. Fast bei allen physikalischen Gröfsen ist es zunächst nötig, Zusammensetzungen zu suchen, die als eine Addition bezeichnet werden können, bei denen also das Resultat der ganzen Zusammenfassung von der Zusammenfassung in Gruppen und von der Reihenfolge, in welcher wir die einzelnen Gröfsen zusammenfassen unabhängig ist.

§ 13. Die irrationalen Zahlen und die continuirlich veränderlichen Gröfsen.

Sobald wir für bisher unbekannte Arten von Gröfsen die Methode ihrer Addition gefunden haben, so erlangen wir dadurch die Kenntnifs einer grofsen Reihe von Eigenschaften, von allen solchen Eigenschaften, die unmittelbar aus den Axiomen der Addition fliefsen. Wir können dann auch gleiche Gröfsen derselben Art

addiren und kommen dadurch auf den Begriff einer Anzahl von gleichen Gröfsen, die zusammengefügt ein Ganzes bilden. In diesem Falle ist aber das Ganze als die Summe einer Reihe gleich großer Stücke zu betrachten, und solche Gröfsen pflegen wir dann dadurch zu bezeichnen, dafs wir die Anzahl der Stücke und die Art der Einheitsgröfse, d. i. die Art der gleichen Einzelstücke, welche wir zusammengefügt haben, angeben. Dadurch kommen wir auf den Begriff der benannten Zahlen. Sobald die Einheitsgröfse als bekannt vorausgesetzt werden kann, genügt eine Zahl, um eine gleichartige Gröfse zu bezeichnen. Wir können dadurch z. B. jedem Andern, der weifs, wie schwer ein Grammstück ist, jedes beliebige Gewicht definiren und genau beschreiben, und zwar so beschreiben, dafs er, wenn er will, es wieder herstellen und wieder auffinden kann. Und zwar sind wir nicht gebunden an eine Reihe von Gröfsen, welche durch ganze Zahlen repräsentirt werden, sondern wir können Stücke definiren, deren Gröfsen sich wie irgend zwei ganze Zahlen zu einander verhalten, indem wir jedes von ihnen durch dieselbe passend gewählte Einheit ausdrücken. Dadurch wird also die Möglichkeit, die Naturgesetze auszusprechen, aufserordentlich erweitert, und es ist deshalb die Rückführung der Beschreibung von Gröfsen auf Einheitsgröfsen und auf die ganzen Zahlen und deren Verhältnisse ein aufserordentlich wichtiger Schritt.

Nun ist hier eine Schwierigkeit zu erwähnen. Bei vielen Gröfsenarten der Natur können wir Stücke von jeder beliebigen Gröfse als zählbare Gegenstände herstellen und damit beliebige Gröfsenverhältnisse durch zwei verschieden grofse Stücke thatsächlich zur Darstellung bringen. So können wir das bei Gewichten thun, wir können es thun, wenn es sich um Längen handelt und bei vielen andern Gröfsen. Aber wir können nicht behaupten, dafs das Gröfsenverhältnifs immer durch ganze Zahlen wiedergegeben werden kann. Die Construction der Diagonale eines Quadrates z. B. giebt uns schon einen Fall, wo das Längenverhältnifs zur Quadratseite nicht durch ganze Zahlen ausgedrückt werden kann. Wir nennen das ein irrationales Verhältnifs. Um ein irrationales Verhältnifs durch ganze Zahlen zu bezeichnen, helfen wir uns dadurch, dafs wir Brüche mit immer gröfserem Zähler und Nenner suchen, die dem wirklichen Verhältnifs immer näher und näher kommen.

So giebt uns die Arithmetik eine Reihe von Methoden, um dem Längenverhältnifs der Diagonale zur Quadratseite, d. i. dem Werthe $\sqrt{2}$ durch Verhältnisse von ganzen Zahlen so nahe zu kommen, wie wir wollen. Wenn nach dem rationalen Verhältnifs aus der Quadrat-

seite eine Länge construirt würde, so würde sie mit der Länge der Diagonale so genau übereinstimmen, als wir nur wollen.

Die Schwierigkeit liegt hier nur in der Rechenoperation. Dafs in der Natur Diagonalen der Quadrate existiren, das ist ja keine Frage, und ebenso können sich andere irrationale Verhältnisse bei bestimmten physikalischen Untersuchungen uns darbieten. Die Schwierigkeit oder die Unmöglichkeit besteht hier nicht in dem wirklichen Vorkommen solcher Gröfsen und Gröfsenverhältnisse, sondern in der Unvollkommenheit unserer Methoden, die wirklichen Gröfsenverhältnisse anzugeben.

Aehnlich verhält es sich mit der viel diskutirten Frage über die Existenz continuirlicher Gröfsen. Wir werden sehen, dafs uns gleich die ersten Untersuchungen über physikalische Wirkungen von Kräften dazu führen, Gesetze der Bewegung aufzusuchen, und dafs wir uns eine Bewegung eines materiellen Punktes nicht wohl anders vorstellen können, als dafs der Punkt continuirlich ohne Lücke die Reihe der Punkte durchläuft, welche auf seinem Wege liegen, und zwar, ohne jemals einen noch so kleinen Zwischenraum zu überspringen. Es liegt sogar eigentlich schon in dem Begriff und in der Vorstellung der Bewegung eines Punktes, dafs wir mit einem solchen Gedanken eines von einem Punkte zu einem entfernten überspringenden Körpers nichts anzufangen wissen. Wenn ein Körper sich durch den Raum bewegen soll, so haben wir dabei den Begriff und verlangen, diesen Begriff festzuhalten, dafs das identisch derselbe Körper sei, der nach einander in die verschiedenen Punkte des Weges hinein kommt, und diese Identität des bewegten Körpers ist für unsere Vorstellung nur fafsbar, wenn ein allmählicher Uebergang vorhanden ist. Wenn der Uebergang durch eine continuirliche Reihe von Raumpunkten hindurch stattfindet, so ist durch die Nachbarschaft der Punkte die Voraussetzung schon angebahnt, dafs es derselbe Körper sein kann, der nach einander durch die verschiedenen Punkte hindurch geht. Dagegen bei einem Punkte, der intermittirend seine Bahn durchliefe und bald an der einen Stelle, im nächsten Augenblicke an einer davon entfernten Stelle wäre, bei einem solchen würden wir niemals in unserer Vorstellung anerkennen, dafs es derselbe Punkt ist. Denn wir würden gar keine Kennzeichen uns auch nur vorstellen können, wodurch der Punkt als identisch gegeben wäre.

Andererseits wird der Begriff der Continuität auch durch die Vorstellung verlangt, daß wir durch eine Fläche einen Raum abschliefsen können und durch eine Linie eine Fläche abgrenzen

können; denn eine solche Begrenzung eines Flächenstückes würden wir niemals ausführen können durch eine Reihe von einander getrennter Punkte, die in der Fläche liegen, sie mögen noch so nahe an einander sein.

Diese Vorstellungen zwingen uns dazu, auch die Existenz continuirlich sich ändernder Gröfsenverhältnisse anzunehmen. Nun hat es keine Schwierigkeit, von solchen continuirlich sich ändernden Gröfsen stetig sich ändernde Functionen zu bilden. Diese stellen dann auch continuirlich sich ändernde Gröfsen dar.

Wenn z. B. für einen Werth der unabhängigen Veränderlichen x die Function gröfser als 2, für einen anderen Werth dagegen kleiner als 2 wäre, so würden wir einen Werth von x finden können, für welchen die Function den Werth 2 hat. D. h. strenge genommen finden wir ein beliebig kleines Intervall von x, für das die Function beliebig wenig von 2 verschieden ist. Das Intervall wird zugleich mit der Abweichung von 2 beliebig klein. Bei einer stetigen Function genügt es, dafs sie für jeden rationalen Werth der unabhängigen Veränderlichen x eines Intervalls definirt sei, um für jeden Werth des Intervalls mit beliebiger Genauigkeit berechnet werden zu können. In der Physik haben wir es nur mit solchen Functionen zu thun, obgleich man sehr wohl mathematische Ausdrücke bilden kann, die in keinem Intervall stetige Functionen definiren, trotzdem sie für jeden rationalen Werth von x wohl definirt sind.

So ist z. B.:

$$y = \sum \sin(\mathfrak{a}!\,.\,x\,.\,\pi)$$

eine Summe, die für jeden rationalen Werth von x einen bestimmten endlichen Werth hat. Sind m und n irgend zwei ganze Zahlen und setzt man $x = m/n$, so ist von $\mathfrak{a} = n$ ab jedes Glied der Reihe gleich Null, weil $\mathfrak{a}!\,x\,\pi$ für $\mathfrak{a} \geqq n$ nothwendig ein ganzes Vielfaches von π ist. Es besteht dann also der Ausdruck aus einer endlichen Anzahl von Gliedern und hat einen bestimmten endlichen Werth. Für einen irrationalen Werth von x kann dagegen keines der Glieder wegfallen. Die Reihe bleibt unendlich und es läßt sich zeigen, dafs sie keinen bestimmten Werth annimmt.

§ 14. Verknüpfungen von Gröfsen zu ungleichartigen Gröfsen.

Eine benannte Zahl bildeten wir als die Summe einer gewissen Anzahl gleicher physikalischer Größen. Das heifst also, wir haben ein Product, in dem der eine Factor eine physikalische Gröfse ist, die wir als Einheit bezeichnen. Der andere Factor ist eine reine Zahl. Alle diese Gröfsen lassen eine additive Verbindung zu, die immer wieder Gröfsen der gleichen Art liefert. Nun giebt es aber in vielen Fällen auch Methoden, um auf andere Art aus gegebenen Gröfsen andere abzuleiten, die nicht gleichartig sind.

So können wir z. B. aus Grundlinie und Höhe eines Rechteckes, also aus zwei Längen, seine Fläche berechnen. Die Anzahl der Quadratcentimeter, welche die Fläche F hat, finden wir als das Product der Centimeter, die in der Grundlinie L und der Höhe R enthalten sind:

$$F = L \,.\, R.$$

Ebenso kann ein Volumen als das rechnungsmäfsige Product aus drei Linien dargestellt werden.

Wir finden auf diese Weise Gleichungen zwischen ungleichartigen benannten Zahlen. Sobald solche Gleichungen nur eine Gröfse enthalten, deren Benennung bisher noch nicht definirt ist, so kann man sie benutzen, um die Definition der Benennung zu finden.

Der erste Schritt ist gewöhnlich der, zu erkennen, dafs eine benannte Gröfse einem aus anderen benannten Gröfsen zusammengesetzten Ausdruck proportional ist, und dann mufs man sich sagen, dafs die Proportionalität in eine Gleichung verwandelt werden kann, wenn man einen passenden Proportionalitätsfactor einführt. Der Proportionalitätsfactor kann uns nun eine neue benannte Gröfse liefern.

So hat man z. B. beim specifischen Gewicht zunächst nur die Thatsache, dafs bei demselben Stoff die Masse dem Volumen proportional ist. Dann führt man den Begriff der Dichtigkeit ein, die man definirt durch das Verhältnifs zwischen der Gesammtmasse und dem Volumen des Körpers. Die Dichtigkeit wird dadurch zu einer physikalischen Gröfse, deren Einheit durch die Einheiten der Masse und das Rauminhaltes gegeben ist.

In den verschiedenen physikalischen Gesetzen kommen nun sehr mannigfaltige Zusammensetzungen dieser Art vor. Und es werden dadurch neue Gröfsen eingeführt, deren Einheiten bisweilen in ziemlich complicirter Weise aus den ursprünglichen Einheiten zusammengesetzt werden.

§ 15. Die absoluten Einheiten.

Nun besteht eine der ersten und wichtigsten Aufgaben der theoretischen Physik darin, die Bewegungen eines materiellen Punktes zu beschreiben.

Die Lage eines solchen Punktes im Raume ist durch 3 Coordinaten gegeben. Als Coordinaten kann man allerlei geometrische Gebilde benutzen.

Eine einfache Methode besteht darin, dafs man die senkrechten Abstände von drei zu einander senkrechten Ebenen zur Bestimmung der Lage im Raume benutzt. Man kann die Bewegung eines Punktes dadurch darstellen, dafs man angiebt, welche Coordinaten er in jedem Zeitmoment haben soll. Wenn man auch die Einwirkung von Kräften darstellen will, so zeigt sich, dafs man noch eine weitere Gröfse, die Masse haben mufs, welche den Widerstand der Trägheit gegen die einwirkenden Kräfte darstellt und daher zu einer vollständigen Beschreibung des Vorganges gebraucht wird.

Nun hat man im Laufe der Zeit immer mehr Beziehungen zwischen den Bewegungen eines Körpers und den übrigen physikalischen Eigenschaften der Körper kennen gelernt. Sobald wir einen Einflufs einer physikalischen Eigenschaft auf die Bewegung eines materiellen Punktes von gegebener Masse wahrnehmen, so können wir die Eigenschaft durch den Einflufs auf die Bewegung messen und damit ihre Einheit auf die Einheiten von Masse, Länge und Zeit zurückführen, durch welche wir die Bewegung des materiellen Punktes beschreiben. Wir nennen diese drei die absoluten Einheiten. Sie zeichnen sich dadurch aus, dafs sie genau reproducirt und überliefert werden können und daher allgemein und genau bekannt sind.

Als Einheit für die Zeit benutzt man bei kürzer dauernden Vorgängen meistentheils die Secunde. Für die Länge wird das metrische System benutzt, für Versuche, die in kleinem Maafsstabe ausgeführt werden, meistentheils das Centimeter oder wohl auch das Millimeter, für gröfsere Dimensionen das Meter, oder wenn sie sich über gröfsere Teile der Erdoberfläche erstrecken, das Kilometer und

noch gröfsere Längen. Endlich für die Masse braucht man meistentheils das Gramm oder das Centigramm oder auch gröfsere Einheiten je nach der Gröfse der Körper, mit denen man zu operiren hat.

Die gewählten Einheiten brauchen bei der Definition einer auf Masse, Länge und Zeit bezogenen Gröfse nicht angegeben zu werden, weil die Beziehung für irgend welche Einheiten dieselbe bleibt. So ist z. B. die Kraft gesetzt gleich einer Masse multiplicirt mit einer Länge und dividirt durch das Quadrat einer Zeit: $M.L/T^2$. Je nach der Wahl der Einheiten richtet sich die Einheit der Kraft. Wird z. B. statt des Gramm das Kilogramm gesetzt, so wird die Einheit der Kraft dadurch 1000 Mal so grofs, die Zahl, welche irgend eine Kraft in den gewählten Einheiten mifst, wird also 1000 Mal so klein. In der Gleichung

$$\text{Kraft} = x\,\text{Gramm}\,.\,\text{Centimeter}/(\text{Secunde})^2$$

haben wir nur Gramm = $^1/_{1000}$ Kilogramm einzusetzen und erhalten daraus

$$\text{Kraft} = x/_{1000}\;\text{Kilogramm}\,.\,\text{Centimeter}/(\text{Secunde})^2$$

Das Analoge gilt für die Aenderung der Länge oder der Zeit. Wenn statt der Secunde die Minute gewählt wird, so wird damit die Einheit der Kraft 3600 Mal kleiner. Die Zahl dagegen, welche irgend eine Kraft in den gewählten Einheiten mifst, wird damit 3600 Mal gröfser. In der Gleichung

$$\text{Kraft} = x\,\text{Gramm}\,.\,\text{Centimeter}/(\text{Secunde})^2$$

haben wir einfach Secunde = $^1/_{60}$ Minute einzusetzen und erhalten

$$\text{Kraft} = 3600\,x\,\text{Gramm}\,.\,\text{Centimeter}/(\text{Minute})^2.$$

statt der Zahl x haben wir in der neuen Einheit also die Zahl $3600\,x$, während die neue Krafteinheit Gramm . Centimeter / (Minute)^2 gleich $^1/_{3600}$ Gramm . Centimeter / (Secunde)^2 ist.

§ 16. Die Addition von Strecken und anderer complexer Gröfsen.

Die Gesetze der Addition lassen sich auch für Complexe ungleichartiger Gröfsen festhalten. Wir addiren dabei die gleichartigen Gröfsen, so dafs unter der Summe von Complexen ungleichartiger Gröfsen der Complex der Summen gleichartiger Gröfsen verstanden

wird. Eine Gleichung, die besagt, daſs zwei Complexe zusammengenommen einem dritten gleich seien, bedeutet also nichts anderes, als daſs alle in den ersten beiden Complexen enthaltenen Gröſsen derselben Art zusammen genommen gleich sind der in dem dritten Complex enthaltenen Gröſse derselben Art. Die Gleichung faſst daher nur in eine Gleichung zusammen, was wir in mehreren Gleichungen ausdrücken, indem wir die gleichartigen Gröſsen addiren. Arithmetisch betrachtet ist also der Unterschied nur formal.

Physikalisch aber giebt es Beispiele solcher complexen Addition, die nicht nur als formale Erweiterung des Additionsbegriffes erscheint, weil die ungleichartigen Gröſsen wirklich zu einer neuen Gröſse zusammengesetzt werden. Die Lehre von der geometrischen Addition der Strecken, wie sie zuerst H. Grassmann entwickelt hat, liefert einen solchen Fall complexer Addition. Unter einer geometrischen Strecke versteht Grassmann die gerade Verbindung von einem Anfangspunkt zu einem Endpunkte, wobei aber nicht blos die Länge der Strecke in Betracht kommt, sondern auch die Richtung, so daſs wir zwei Strecken nur gleich setzen dürfen, wenn sie gleiche Länge und auch gleichzeitig gleiche Richtung haben. Die Additionsregel für solche Strecken spricht Grassmann in der folgenden Weise aus. Wenn eine zweite Strecke zu der ersten addirt werden soll, so setzt man den Anfangspunkt der zweiten Strecke an den Endpunkt der ersten, und construirt nun die Strecke, die vom Anfangspunkt der ersten Strecke zum Endpunkt der zweiten läuft. Sie wird als die geometrische Summe der beiden Strecken bezeichnet.

Zunächst läſst sich zeigen, daſs die Ordnung, in welcher wir die Strecken zusammenfügen, keinen Einfluſs auf die Summe hat.

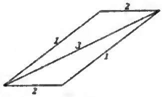


Fig. 1.

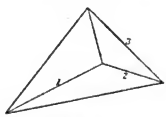


Fig. 2.

Wenn wir von demselben Anfangspunkt anfangen und nun zuerst die zweite Strecke zeichnen und daran die erste abtragen, so gelangen wir zu demselben Punkt wie im ersten Fall (Fig. 1). Die beiden Constructionen zusammen bilden die Figur eines Parallelogrammes, dessen eine Diagonale die geometrische Summe der beiden Strecken ist. Damit ist das eine Gesetz der Addition $a + b = b + a$ für diese

Zusammensetzung von Strecken bewiesen. Eben so läfst sich das andere Gesetz $(a + b) + c = a + (b + c)$ beweisen. Wenn wir zuerst die Strecke 1 und 2 zusammensetzen und zu ihrer geometrischen Summe eine dritte Strecke 3 geometrisch addiren, so gelangen wir zu demselben Punkt, wie wenn wir zu der ersten Strecke die geometrische Summe der zweiten und dritten geometrisch addiren (Fig. 2).

Läfst man nur Strecken von zwei einander entgegengesetzten Richtungen zu, so erhält man eine geometrische Darstellung der positiven und negativen Zahlen.

Läfst man aufser diesen Strecken auch noch Strecken von zwei andern einander entgegengesetzten Richtungen zu, so lassen sich durch geometrische Addition einer Strecke der ersten Art und einer Strecke der zweiten Art alle Strecken zusammensetzen, die einer Ebene parallel sind. Diese bilden damit eine geometrische Darstellung der complexen Zahlen. Der reelle Theil der complexen Zahl entspricht der Strecke der einen Art, der imaginäre Teil der der andern Art. Die complexe Zahl selbst entspricht der Strecke, die aus den beiden Strecken durch geometrische Addition gebildet wird. Die Summe von irgend welchen complexen Zahlen bildet man algebraisch, indem man die reellen Theile für sich und die imaginären Theile für sich addirt. Geometrisch läuft dies auf die geometrische Addition der entsprechenden Strecken hinaus. Denn jede Strecke läfst sich als geometrische Summe zweier Strecken jener beiden Arten darstellen. Nun kann man nach den Gesetzen der geometrischen Addition die Summanden beliebig vertauschen und damit alle Strecken der einen Art für sich und alle Strecken der anderen Art für sich addiren. Das ist dann aber genau das algebraische Verfahren. In dieser Weise hat Gauss die Deutung der complexen Gröfsen eingeführt. Er bezeichnet eine complexe Zahl mit

$$x + y\,i,$$

wo x und y die beiden Strecken verschiedener Richtung bestimmen. Denken wir uns alle Strecken von einem Punkt aus abgetragen, den wir zum Anfangspunkt der Coordinaten machen, so können x und y als die Coordinaten des Endpunktes der Strecke aufgefafst werden. Die x-Axe giebt dabei die Richtung der Strecken an, die dem reellen Theil entsprechen, die y-Axe dagegen die Richtung der Strecken, die dem imaginären Theil entsprechen.

In dem speciellen Fall, wo wir diese Strecken senkrecht auf

einander wählen, wird, wenn r die Länge der Strecke und α ihren Richtungswinkel bedeutet:

$$x = r \cos \alpha \qquad y = r \sin \alpha,$$

und damit

$$x + iy = r.(\cos \alpha + i \sin \alpha),$$

oder auch:

$$x + iy = r.e^{i\alpha}.$$

In dieser Form ist die Multiplication und Division complexer Zahlen am einfachsten auszuführen, deren Besprechung wir indessen hier übergehen. Die geometrische Addition ist nicht beschränkt auf Strecken, die einer Ebene parallel sind, sondern ist ebenso gut auf Strecken anwendbar, die ganz beliebig im Raume gerichtet sein können. Jede Strecke im Raume können wir als geometrische Summe von drei Strecken darstellen, deren Richtungen drei beliebig festgesetzten Richtungen gleich oder entgegengesetzt sind. Nur dürfen die drei festen Richtungen nicht einer Ebene parallel sein.

In dieser Weise stellt sich eine Strecke im Raume als ein Complex von drei ungleichartigen Gröfsen dar. Und ähnlich wie die Strecken in der Ebene auf die complexen Zahlen mit zwei Einheiten führen, so führen die Strecken im Raume auf complexe Zahlen mit drei Einheiten. Das Rechnen mit solchen Zahlen ist in der Quaternionentheorie von Hamilton begründet worden.

Dieselbe Art von Addition, wie wir sie für die Strecken definirt haben, kann auf eine ganze Anzahl von Gröfsen angewendet werden. Und zwar gilt das nicht nur von Gröfsen, die ihrer Definition nach schon durch Strecken dargestellt werden, wie z. B. Kräfte und Geschwindigkeiten; sondern auch von Gröfsen, die ganz andern Gebieten der Physik angehören. Man kann z. B. zwei Lichter verschiedener Farbe und Intensität mischen. Man denke sich dieselbe Fläche von beiden Lichtern beleuchtet. Dann bezeichnet man die Farbe und die Intensität, unter der die Fläche bei der gleichmäfsigen Beleuchtung mit zwei Lichtern erscheint, als die Mischfarbe. Diese Mischfarbe kann man als die Summe der Farben bezeichnen, mit der jedes einzelne Licht die Fläche beleuchtet. Es läfst sich nämlich zeigen, dafs man gleich aussehende Lichter auf sehr verschiedene Weise durch Mischung herstellen kann. So läfst sich z. B. Weifs zusammensetzen aus Scharlachroth und Grünblau, oder aus Schwefelgelb und bläulichen Violett, oder aus Karminroth und Grün. Die verschiedenen Arten von Weifs, die durch Mischung

verschiedener Lichter gewonnen werden, sind übrigens in ihren physikalischen Eigenschaften zum Theil sehr verschieden; so z. B. wirkt ein Weifs, das aus Violett und Gelb zusammengesetzt ist, aufserordentlich stark auf gewöhnliche lichtempfindliche Platten und markirt sich in Photographien als ein sehr helles Licht, während Scharlachroth und Blaugrün eine schwache Wirkung hat. Die Bestandteile haben eben in den verschiedenen Fällen ganz verschiedene Wellenlängen, und wenn sie durch Diffraction zerlegt werden, so bekommen wir ganz verschiedene Farbenerscheinungen. Dennoch läfst sich für die physiologische Wirkung auf das Auge der Satz aufstellen, wie er von GRASSMANN formulirt wurde, dafs gleich aussehende Lichter, die also aus sehr verschiedenen Bestandtheilen bestehen können, gemischt gleich aussehende Mischungen geben. Dabei ist die Reihenfolge der Mischung für das Resultat gleichgültig. Damit ist die Berechtigung gegeben, die Farbenmischung als Addition aufzufassen; und es zeigt sich, dafs es eine complexe Addition ist, ähnlich der der Strecken im Raume. Man kann jede Farbe als Mischung aus drei Grundfarben zusammensetzen, die man mit gewissen Intensitäten zu nehmen hat. Jede Grundfarbe mit ihrer Intensität bildet eine benannte Zahl und der Complex der drei ungleichartigen benannten Zahlen stellt die betreffende Mischfarbe dar. Die Zusammensetzung zweier beliebigen Farben zu einer dritten läuft algebraisch auf die Addition der beiden Intensitäten jeder der drei Grundfarben hinaus, geradeso wie die geometrische Addition zweier Strecken im Raume algebraisch auf die Addition der Zahlen hinausläuft, welche jede der drei Componenten definiren.

Ein anderes Beispiel solcher Addition bildet die Schwerpunktsconstruction von irgend welchen Massen, wenn wir uns jedes Mal im Schwerpunkt die ganze Masse vereinigt denken.

Gewöhnlich werden die Farbenmischungen durch Schwerpunktsconstructionen anschaulich dargestellt. Man läfst den drei Grundfarben die Ecken eines Dreiecks entsprechen und ihren Intensitäten die Massen, die in diesen drei Punkten liegen sollen. Der resultirenden Mischfarbe entspricht dann der Schwerpunkt der drei Massen und der Intensität entspricht die Summe der Massen.

Jeder Masse, die man sich in irgend einem Punkte der Dreiecksfläche denkt, entsprechen auf diese Weise drei Massen in den drei Punkten als deren geometrische Addition man die erste Masse auffassen kann.

§ 17. Zusammensetzung von Drehungen.

Von den Zusammensetzungen, denen wir in der Physik begegnen, folgen keineswegs alle den Gesetzen der Addition. Es wird gut sein, auch ein Beispiel einer Zusammensetzung näher zu untersuchen, die man nicht als Addition auffassen kann.

Wir betrachten die Drehungen eines festen Körpers um irgend welche Axen. Wir wollen ihn uns als Kugel vorstellen, die die Freiheit hat, sich um ihren Mittelpunkt zu drehen. Dabei verschiebt sich ihre Oberfläche in sich selbst, welche Bewegungen sie auch ausführen mag. Bei irgend einer Drehung der Kugel bleiben die Endpunkte des Durchmessers, um den sie sich dreht, liegen. Alle übrigen Punkte der Oberfläche beschreiben dagegen Kreise, deren Mittelpunkte auf der Drehungsaxe liegen.

Sei a ein Endpunkt der ersten Drehungsaxe, b ein Endpunkt der zweiten Drehungsaxe (Fig. 3). Es möge β der Punkt der Kugeloberfläche sein, der durch die erste Drehung in den Punkt b übergeht und α der Punkt der Kugeloberfläche, in den durch die zweite Drehung der Punkt a übergeht. Wir verbinden a mit β, a mit b, b mit α durch gröſste Kreise. Bei der ersten Drehung geht dann der Kreisbogen $a\beta$ in ab über, bei der zweiten Drehung wird ba in $b\alpha$ übergeführt.

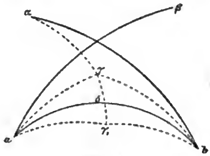


Fig. 3.

Die Aufgabe ist nun, die beiden hinter einander angebrachten Drehungen durch eine Drehung zu ersetzen. Um die Drehungsaxe zu finden, müssen wir einen Punkt suchen, dessen Ort durch die beiden Drehungen nicht verändert wird, der also durch die erste Drehung aus seiner Lage gebracht und durch die zweite Drehung in diese Lage wieder zurückgeführt wird. Diesen Punkt finden wir dadurch, daſs wir durch a und b gröſste Kreise legen, die den Drehungswinkel $\beta a b$ und den Drehungswinkel $a b \alpha$ halbiren. Der Schnittpunkt γ dieser gröſsten Kreise ist der gesuchte Punkt. Denn wenn wir die erste Drehung ausführen, die Drehung um a, so wird der Bogen $a\beta$ in ab übergehen und der Punkt γ wird dabei über den Bogen ab hinweg nach γ_1 rücken. Der Punkt γ_1 muſs so liegen, daſs der Winkel $\gamma a \gamma_1$ von dem Bogen ab halbirt wird. Denn $a\gamma_1$ muſs zu ab gerade so liegen wie $a\gamma$ zu $a\beta$, und daher muß der Winkel $\gamma_1 a b$ gleich dem Winkel $\gamma a \beta$ und damit gleich dem

Winkel $\gamma a b$ sein. Zugleich bleibt bei der Drehung die Entfernung des Punktes γ von dem Drehungspol a ungeändert, so daſs

$$\gamma a = \gamma_1 a$$

sein muſs.

Verbindet man nun γ mit γ_1 durch den Bogen eines gröſsten Kreises, so wird er durch den Bogen $a b$ senkrecht halbirt. Denn ist δ der Schnittpunkt, so müssen die Dreiecke $a \delta \gamma$ und $a \delta \gamma_1$ congruent sein, weil zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel übereinstimmen. Daraus folgt, daſs auch die Dreiecke $\gamma \delta b$ und $\gamma_1 \delta b$ congruent sind, weil die Seiten $\gamma_1 \delta$ und $\gamma \delta$ gleich sind, die Seite $b \delta$ beiden Dreiecken gemeinsam ist und die Winkel bei δ als rechte Winkel übereinstimmen. Daraus folgt, daſs $b \gamma_1 = b \gamma$ und daſs auch der Winkel $\gamma_1 b \gamma$ durch den Bogen $a b$ halbirt wird. Bei der zweiten Drehung, der Drehung um b, wird demnach der Punkt γ_1 wieder in den Punkt γ zurückgeführt. Denn der Bogen, in den $b \gamma_1$ durch die Drehung übergeht, muſs ebenso zu $b \alpha$ liegen wie $b \gamma_1$ zu $b a$, d. h. er muſs den Winkel $a b \alpha$ halbiren. Da zugleich die Entfernung des Punktes γ_1 von dem Drehungspol b bei der Drehung ungeändert bleibt, so muß γ_1 in γ übergehen. Durch die beiden Drehungen zusammen genommen bleibt also der Punkt γ an seiner Stelle. Folglich muſs die Lagenänderung der Kugel auch durch eine Drehung um den zu γ gehörigen Durchmesser bewirkt werden können.

Um auch den dazu nötigen Drehungswinkel anzugeben, braucht man nur zu bemerken, daſs der Punkt a in α übergeht und damit der Bogen γa in $\gamma \alpha$. Der Drehungswinkel ist also $a \gamma \alpha$ d. i., gleich dem doppelten des Supplements von $a \gamma b$. Die Pole a und b denken wir uns so gewählt, daſs der Sinn der Drehung derselbe ist. Das läſst sich immer erreichen, weil bei der Drehung um einen Durchmesser der Sinn der Drehung für die beiden Pole entgegensetzt ist. Unter dieser Voraussetzung ist auch der Drehungssinn um den Pol γ derselbe. Wenn wir die Reihenfolge der Drehungen umkehren und erst um b, dann um a drehen, so wird der Punkt γ_1 durch die beiden Drehungen zusammen nicht geändert. Denn die erste Drehung um b führt den Punkt γ_1 nach γ, während die zweite Drehung um a ihn wieder nach γ_1 zurückbringt. Bei Vertauschung der beiden Drehungen erhalten wir also eine andere Drehungsaxe, die das Spiegelbild der ersten Drehungsaxe in Bezug auf die Ebene des Kreises $a b$ ist. Um auch den Drehungswinkel zu finden, haben wir das Spiegelbild von α in Bezug auf dieselbe Ebene zu bilden. Ist α' das Spiegelbild, so geht der Bogen $\gamma_1 \alpha'$ in $\gamma_1 a$ über. Wir

erkennen aus der Symmetrie der Figur, dafs der Drehungswinkel bei der Drehung um γ_1 derselbe ist, wie bei der Drehung um γ.

Durch die Vertauschung der Reihenfolge der beiden Drehungen wird also die Gesammtdrehung nothwendiger Weise eine andere. Der Unterschied wird aber sehr klein, wenn die Drehungen sehr klein sind. Denn dann fallen γ und γ_1 sehr nahe zusammen. Drehungen um endliche Winkel und verschiedene Axen befolgen also bei ihrer Zusammenfassung nicht das Gesetz der Addition

$$a + b = b + a.$$

Wir können deshalb diese Art der Zusammensetzung nicht als eine Addition auffassen. Erst wenn die Winkel unendlich klein werden, sind die Gesetze der Addition erfüllt. Handelt es sich also um Zusammensetzung von Drehungsgeschwindigkeiten, wo wir nur die unendlich kleinen Winkel zu betrachten brauchen, die einem unendlich kleinen Zeittheilchen entsprechen, so können wir diese als Addition betrachten ebenso wie die geometrische Addition von Strecken. Es läfst sich in der That zeigen, dafs die geometrische Construction bei der Zusammensetzung von Drehungsgeschwindigkeiten sich so ausführen läfst, dafs sie auf die geometrische Addition von Strecken hinausläuft. Bezeichnen nämlich a und b die beiden Drehungswinkel um die Pole bei a und b (Fig. 3), so haben wir in dem sphärischen Dreieck $a\gamma b$ nach dem Sinussatz die Gleichung

$$\sin(a\gamma) / \sin(b\gamma) = \sin(a/2) / \sin(b/2).$$

Für unendlich kleine Winkel fällt γ in den Bogen ab und die Gleichung läfst sich schreiben:

$$\sin(a\gamma) / \sin(b\gamma) = a / b.$$

Aus dieser Gleichung ergiebt sich die folgende Construction für die Axe γ. Auf den beiden Radien, die vom Mittelpunkt der Kugel nach den Punkten a und b führen, trägt man Längen auf, die den unendlich kleinen Drehungswinkeln a und b proportional sind. Die so entstehenden beiden Strecken addirt man geometrisch. Die resultirende Strecke giebt die Lage der Axe γ (Fig. 4.) Denn die Winkel, die diese Strecke mit den Componenten bilden, bestimmen sich durch dieselbe Proportion

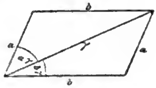


Fig. 4.

$$\sin(a\gamma) : \sin(b\gamma) = a : b.$$

Durch dieselbe Construction erhalten wir auch den unendlich kleinen Winkel der zusammengesetzten Drehung. Denn bezeichnet man ihn mit γ, so ist $\sin \gamma / 2$ wie oben erwähnt gleich $\sin \sphericalangle a \gamma b$ (Fig. 3). Mithin ist

$$\sin(a\,b) : \sin(a\,\gamma) : \sin(b\,\gamma) = \sin \gamma / 2 : \sin a / 2 : \sin b / 2,$$

was für unendlich kleine Winkel übergeht in

$$\sin(a\,b) : \sin(a\,\gamma) : \sin(\gamma\,b) = \gamma : a : b.$$

Die Länge der resultirenden Strecke γ (Fig. 4) ist also zugleich ein Maſs für den resultirenden unendlich kleinen Drehungswinkel.